Examen Analyse II
23 juni 2008

Enige toelichting

- Je krijgt **4 uur** voor dit examen. Je mag tussendoor eten of drinken.
- Na **2 uur** geef je de antwoorden van vragen 1 en 2 af. Het derde en vierde uur werk je verder aan de overige vragen en komt iedereen bij mij voor mondelinge ondervraging over vragen 1 en 2. **Na 4 uur examen geeft iedereen alles af.**
- Het examen is **open boek**. Dit wil zeggen dat je mag gebruik maken van
  - je cursus,
  - je eigen notities afkomstig uit de les, de oefenzitting of je studie thuis,
  - eventueel andere cursussen uit de eerste of tweede bachelor.

  Dit wil zeggen dat je **geen gebruik** mag maken van
  - een zakrekenmachine of draagbare computer,
  - boeken of fotocopies uit boeken.

Schrijf op elk blad je naam.
Hou je studentenkaart klaar.

Veel succes! Stefaan Vaes

1. Zij X een Banachruimte met norm $x \mapsto \|x\|$. Zij $Y \subset X$ een deelvectorruimte. Toon aan dat Y uitgerust met de norm $y \mapsto \|y\|$ een Banachruimte is als en slechts als Y gesloten is in X.

2. Zij $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integreerbaar op $[0, 2\pi]$ en 2π-periodisch. Voor welke 2π-periodische functie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, integreerbaar op $[0, 2\pi]$, geldt dat

$$\widehat{h}(k) = \widehat{f}(k)\, \widehat{g}(k) \quad \text{voor alle } k \in \mathbb{Z} \text{ ?}$$

   Bewijs je antwoord.

3. Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ totaal afleidbaar en definieer

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : g(x, y) = \|f(x, y)\|^2 \; ,$$
$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : h(x, y) = \|f(x, y)\| \; .$$

   a) Is g altijd totaal afleidbaar ? Zo ja, bewijs en geef een formule voor $(dg)(x, y)$. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

   b) Zelfde vraag voor de functie h.

4. Noteer met $g_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de functie gedefinieerd in Voorbeeld 4.29. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een integreerbare, begrensde, gelijkmatig continue functie. Toon de volgende uitspraak aan : als $A \to +\infty$, dan zal

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\, g_A(y)\, e^{ixy}\, dy \to f(x) \quad \text{uniform in } x \in \mathbb{R}.$$

   Hint. Dit is het analogon van de Stelling van Fejér voor Fouriertransformaties.

5. Verifieer de Stelling van Stokes voor het oppervlak $\mathcal{O}$ gegeven door

$$\mathcal{O} = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1 \; , \; x^2 + 4y^2 = z^4\}$$

   en het vectorveld $\mathbf{V}(x, y, z) = (0, x, 0)$.