Examen Analyse II
Augustus 2008

Enige toelichting

- Je krijgt **4 uur** voor dit examen. Je mag tussendoor eten of drinken.
- Na **2 uur** geef je de antwoorden van vragen 1 en 2 af. Het derde en vierde uur werk je verder aan de overige vragen en komt iedereen bij mij voor mondelinge ondervraging over vragen 1 en 2. **Na 4 uur examen geeft iedereen alles af.**
- Het examen is **open boek**. Dit wil zeggen dat je mag gebruik maken van
  - je cursus,
  - je eigen notities afkomstig uit de les, de oefenzitting of je studie thuis,
  - eventueel andere cursussen uit de eerste of tweede bachelor.

  Dit wil zeggen dat je **geen gebruik** mag maken van
  - een zakrekenmachine of draagbare computer,
  - boeken of fotocopies uit boeken.

Schrijf op elk blad je naam.

Hou je studentenkaart klaar.

Veel succes! Stefaan Vaes

1. Beschouw de Hilbertruimte $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},\lambda)$ uitgerust met de norm $\|\cdot\|_2$. Definieer

$$\omega : \mathrm{L}^2(\mathbb{R},\lambda) \to \mathbb{C} : \omega(f) = \int_{[0,1]} x f(x)\, d\lambda(x) \;.$$

Toon aan dat ω een goed gedefinieerde en continue lineaire afbeelding van $\mathrm{L}^2(\mathbb{R},\lambda)$ naar $\mathbb{C}$ is. Bereken de norm $\|\omega\|$.

2. Zij $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ een positief meetbare functie. Toon heel nauwkeurig aan dat

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x^2+y^2)\, d\lambda(x,y) = \pi \int_{[0,+\infty)} f \, d\lambda \;.$$

3. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een integreerbare functie en veronderstel dat f eveneens afleidbaar is. Op pagina 109 gingen we na dat

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} \widehat{f}(t) e^{itx}\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(x+y) D_A(y)\, dy \quad \text{waarbij} \;\; D_A(y) = \frac{\sin(Ay)}{\pi y} \;.$$

   a) Toon nauwkeurig aan dat $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_{[-1,1]} D_A(y)\, dy = 1$. Je mag, zonder dit te bewijzen, gebruiken dat de functie $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ oneigenlijk integreerbaar is op $\mathbb{R}$ met oneigenlijke integraal gelijk aan π.

   b) Toon aan dat voor alle $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x+y) D_A(y)\, dy - f(x) \int_{[-1,1]} D_A(y)\, dy \to 0 \quad \text{als} \;\; A \to +\infty \;.$$

   Hiervoor imiteer je het bewijs van de stelling van Dirichlet. Leid af dat voor alle $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \widehat{f}(t) e^{itx}\, dt = f(x) \;.$$

4. In Definitie 1.11 definieerden we de norm $\|A\|$ van een n bij n matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Bewijs dat

$$\|A\| = \sup\Big\{ \, |(A(x))\cdot y| \;\Big|\; x,y \in \mathbb{R}^n, \|x\| \le 1, \|y\| \le 1 \Big\} \;.$$

Hierbij noteerden we met $\cdot$ het gebruikelijke scalair product op $\mathbb{R}^n$.

5. Verifieer de Stelling van Stokes voor het vectorveld $\mathbf{V}(x,y,z) = (y,0,0)$ en het oppervlak $\mathcal{O}$ gegeven door

$$\mathcal{O} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 1 \;,\; z = e^x\} \;.$$