Examen Lineaire Algebra 2020 (Wiskunde/Fysica)

$\in$ Wina

Aanstaande Maandag 2020

1 Vraag 1

Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een eindigdimensionale vectorruimte en $L : V \to V$ een lineaire transformatie. Veronderstel dat de karakteristieke veeltem ρ volledig ontbindt over $\mathbb{R}$ als een product van eestegraadsfactoren. Veronderstel ook dat voor elke eigenwaarde λ van L de meetkundige mulitpliciteit $\mathrm{d}(\lambda)$ gelijk is aan de algebraische multipliciteit $\mathrm{m}(\lambda)$. Bewijs dat L diagonaliseerbaar is.

2 Vraag 2

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ een inproductruimte. Bewijs de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz.

3 Vraag 3

Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

1. Zijn W_1, W_2 en W_3 deelruimtes van de vectorruimte v. Als $W_1 \oplus W_2 = V$ en $W_1 \oplus W_3 = V$, dan is $W_2 = W_3$.
2. Zij $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Als alle eigenwaarden van A reëel zijn, dan is $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
3. Zijn f_1 tot en met f_5 lineaire transformaties zoals in volgend diagram:

$$\{0\} \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}^8 \xrightarrow{f_3} \mathbb{R}^{13} \xrightarrow{f_4} \mathbb{R}^6 \xrightarrow{f_5} \{0\}$$

   Als $\ker f_{i+1} = \operatorname{Im} f_i$ geldt voor elke $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, dan is $n = 1$. Er stond nog een hint bij deze vraag, maar daarvoor moet je bijbetalen.

   Edit (door de informaticastudent): bepaal achtereenvolgens $\dim \operatorname{Ker} f_5$,$\dim \operatorname{Ker} f_4$,... En neem daarna mee aan de Ulysis CTF ;)

4 Vraag 4

Definieer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto 1$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto x$ en $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto e^x$. Zij V dan de vectorruimte $\operatorname{vct}\{f, g, h\}$. Definieer vervolgens de lineaire transformatie $D : V \to V$ als volgt:

$$D(k) = ak + bk' + k''$$

Voor elke $k \in V$ en met $a, b \in \mathbb{R}$

1. Geef $\dim \ker D$ in functie van a en b.
2. Bepaal alle a en b zodat D diagonaliseerbaar is in $\mathbb{R}$.

5 Vraag 5 (Fysica)

Zij V een eindigdimensionale vectorruimte met dimensie n. Als $1 \leq k \leq n$, en $U_1, ..., U_k$ verschillende deelruimtes zijn van V, met elk dimensie $n - 1$

1. Bewijs dan dat $\dim (U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_k) \geq n - k$
2. Toon met een voorbeeld aan dat gelijkheid hier niet altijd hoeft te gelden.

6 Vraag 5 (Informatica)

Definieer $V : A \in \mathbb{R}^{n \times n} | Tr(A) = 0$

1. Toon aan dat V een deelruimte is van $\mathbb{R}^{n \times n}$
2. Bepaal een basis van V
3. Definieer L: $\mathbb{R}^{2\times 2} - > \mathbb{R}^{2\times 2}$: $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} - > \begin{matrix} c & d \\ a & -b \end{matrix}$ en stel W = L(V). Bepaal een basis van $V \cap W$.