Oplossingen van de oefeningen van het proefexamen. Merk op dat er voor geen van de vragen een unieke oplossingsmethode bestaat.

2 Schrijf

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Omdat een matrix inverteerbaar is als en slechts als zijn getransponeerde inverteerbaar is, volstaat het een inverteerbare matrix E te vinden zodat

$$E \cdot A^T = \Delta$$

voor een *beneden*driehoeksmatrix Δ. Inderdaad, beide leden van deze vergelijking transponeren levert dan het gevraagde.

Het volstaat dus A^T te rijreduceren naar een benedendriehoeksvorm. De matrix E (= product van elementaire matrices) waarmee we A^T op die manier impliciet langs links vermenigvuldigen kunnen we onthouden door dezelfde rijreducties op I_3 toe te passen.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{R}_2 \leftarrow 7\mathrm{R}_2 - 2\mathrm{R}_3]{\mathrm{R}_1 \leftarrow 7\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 15 & 0 & 7 & 0 & 1 \\ -3 & -9 & 0 & 0 & 7 & -2 \\ -2 & 1 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{R}_1 \leftarrow 3\mathrm{R}_1 + 5\mathrm{R}_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 21 & 35 & -7 \\ -3 & -9 & 0 & 0 & 7 & -2 \\ -2 & 1 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

We vinden dus

$$E = \begin{pmatrix} 21 & 35 & -7 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dan is $P = E^T$ een goed antwoord op de vraag.

Alternatieve oplossing: De oefening kan ook op een meer ambachtelijke manier worden opgelost. We proberen eerst de eerste kolom van P in te vullen. We zoeken dus x, y, z zodat

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & * & * \\ y & * & * \\ z & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

waarbij de sterretjes eender wat mogen zijn. Dit geeft als voorwaarden

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y - 7z = 0. \end{cases}$$

Dit uitwerken geeft bijvoorbeeld de oplossing $(-3, -5, 1)$. Nu zoeken we de tweede kolom:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & x & * \\ -5 & y & * \\ 1 & 0 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

De voorwaarde $x - 2y = 0$ is bijvoorbeeld voldaan voor $(2, 1)$. Tenslotte vullen we de derde kolom willekeurig aan:

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In dit alles werkten we naar een driehoeksvorm toe om de inverteerbaarheid van P te kunnen garanderen: de determinant is op teken na het product van de elementen op de (stijgende) diagonaal. In het bijzonder geldt $\det P \neq 0$, dus P is inverteerbaar.

Voor grotere dimensies wordt deze methode echter onhandig.

3 (a) Als $U_1 \subset U_2$ of $U_2 \subset U_1$ dan is dit triviaal. Veronderstel daarom dat er een $u_1 \in U_1 \backslash U_2$ bestaat, alsook een $u_2 \in U_2 \setminus U_1$. Dan is $u_1 + u_2 \notin U_1 \cup U_2$. Inderdaad, stel dat $u_1 + u_2 \in U_1$. Omdat U_1 een lineaire deelruimte is en omdat $u_1 \in U_1$, besluiten we dat $u_2 = (u_1 + u_2) - u_1 \in U_1$: contradictie. Analoog leidt $u_1 + u_2 \in U_2$ tot een contradictie.

(b) We gebruiken (a) drie keer. Eerst kiezen we een vector $v_1 \in V$ die niet tot

$$U_1 \cup U_2 \tag{1}$$

behoort. Dan kiezen we een vector $v_2 \in V$ die niet tot

$$(U_1 + [v_1]) \cup (U_2 + [v_1]) \tag{2}$$

behoort. Tenslotte kiezen we een vector $v_3 \in V$ die niet tot

$$(U_1 + [v_1, v_2]) \cup (U_2 + [v_1, v_2]) \tag{3}$$

behoort. Telkens mogen we (a) toepassen omdat de betrokken deelruimten dimensie hoogstens $2006 + 2 = 2008$ hebben. We beweren dat $U = [v_1, v_2, v_3]$ aan de gestelde eisen voldoet.

Kies een $u \in U_1$ en veronderstel dat er $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ bestaan waarvoor

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = u.$$

Dan moet $\lambda_3 = 0$, want anders kunnen we dit herschrijven als

$$v_3 = 1/\lambda_3 u - \lambda_1/\lambda_3 v_1 - \lambda_1/\lambda_3 v_2,$$

wat in tegenspraak is met (3). Maar dan moet ook $\lambda_2 = 0$, want anders zou

$$v_2 = 1/\lambda_2 u - \lambda_1/\lambda_2 v_1,$$

wat in tegenspraak is met (2). Tenslotte moet ook $\lambda_1 = 0$ om geen tegenspraak met (1) te bekomen. Dus $u = 0$ en v_1, v_2, v_3 zijn lineair onafhankelijk. Dit toont aan dat U een 3-dimensionale deelruimte is en dat $U_1 \cap U = \{0\}$. Wegens de symmetrie geldt dan natuurlijk ook dat $U_2 \cap U = \{0\}$.

4 (a) VALS. Werk bijvoorbeeld in $V = \mathbb{R}^2$ en neem $U_1 = U_2 = [(1, 0)]$, $W_1 = [(0, 1)]$ en $W_2 = [(1, 1)]$.

(b) Neem m = prijs van een pot mayonaise, a = prijs van een alcoholstift, s = prijs van een sigaar, telkens uitgedrukt in EUR. Schrijf b voor de waarde van 1 BND in EUR. Dan vinden we

$$\begin{cases} m + 2a + 3s & = & 29 + b \\ 2m + 2a + 5s & = & 50 - 2b \\ 2a + s & = & 9 + 2b \end{cases}$$

De tweede vergelijking aftrekken van twee keer de eerste vergelijking geeft

$$2a + s = 8 + 4b,$$

wat samen met de derde vergelijking geeft dat $b = 1/2$. Eén Bruneise Dollar is dus een halve Euro waard.