

Lineaire algebra

(vondst lijnen, lijnen x lijnen)

H1 - Eerste graadvergelijkingen en matrices

1.1. Context en matrixvorm

• eerste graads vgl met onbekenden / variabelen $x_1, \dots, x_n$ en coëf $a_1, \dots, a_n$:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b \quad \text{met } b \text{ de c.t. term / rechterlid}$$

• stelsel van m vergelijkingen en n onbekenden:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

in matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{of} \quad A \cdot X = B$$

uitgebreide matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

of gerande matrix

coëfficiëntenmatrix A

variabele X

rechterlid B

indien $B = \vec{0}$ dan spreken we van een homogeen stelsel

1.2. Gauss-eliminatie, echelonvorm, rijgereduceerde vorm

bewijs

naar vgl

$$R_i \rightarrow \mu R_i + \lambda R_j$$

• 3 elementaire rijoperaties (ERO's): stelsel omvormen zonder oplossingsverz. te verliezen

$$1) R_i \rightarrow \lambda R_i \quad (\lambda \neq 0)$$

$$R_i \rightarrow \frac{1}{\lambda} R_i$$

$$2) R_i \leftrightarrow R_j$$

$$R_j \leftrightarrow R_i$$

$$3) R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j$$

$$R_i \rightarrow R_i - \lambda R_j$$

(omgekeerd maken ERO's)

• **definitie 1.4:** Twee matrices / stelsels R en S zijn **rij-equivalent** indien de ene uit de andere kan ontstaan door een opeenvolging van ERO's.

• **def. 1.5:** Het **leidende element** van een rij is het $\neq 0$ element vóór rij $\neq 0$.

Een matrix is in **trapvorm** als

- alle elementen onder het leidende element gelijk zijn aan 0

- eventuele nulrijen onderaan staan

Een matrix is in **echelonvorm** als de matrix in trapvorm staat met als elk leidende element 1

Een matrix is **rijgereduceerd** als de matrix in echelonvorm staat en als ook boven de leidende 1'en alle elementen 0 zijn.

• **def. 1.6:** Indien de matrix vgl stelsel in trapvorm staat, noemen we de variabelen die corresponderen met de kolommen waarin een leidende element staat **gebonden variabelen** of basisvariabelen. De andere variabelen zijn **vrije variabelen**.

$$\text{v.l. } \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x + 2z = 5 \\ t = 2 \end{cases}$$

met x, z, t gebonden en y vrij

1. Introduction

2. Background

3. Methodology

4. Results

5. Discussion

6. Conclusion

7. References

8. Appendix

Page 1

9. Acknowledgements

10

11. Contact Information

12

13. Declaration of Interest

14. Funding Sources

15. Author Contributions

16. Data Availability

17. Ethics Approval

18. Conflicts of Interest

19. Supplementary Materials

20. References

(bewijs)

- **propositie 1.8:** Elke matrix is rg-equivalent met een matrix in echelonvorm en zelf met een **rijgereduceerde** matrix.
- **def 1.9:** De methode om een matrix te herleiden tot een matrix in echelonvorm of in rijgereduceerde vorm door middel van ERO's, is de **Gauss-eliminatie** methode.
- Om een matrix dan op te lossen herleiden we een matrix ahr ERO's tot echelonvorm en lossen we dan het stelsel op door **achterwaartse substitutie**.
- **stelling 1.11:** Voor een $(m \times n)$ -stelsel rg in echelonvorm met $m-n$ rijen onderaan geldt dat dat stelsel:
 - 1) **geen** opl. heeft als m minstens 1 van de rechterleden $b_{m+1}, \dots, b_m \neq 0$ (**strijdig** stelsel)
 - 2) **júist één** opl. heeft als $b_{m+1} = \dots = b_m = 0$ en $n = m$
 - 3) **∞** opl. heeft als $b_{m+1} = \dots = b_m = 0$ en $n < m$.
↳ als er dus $n-n$ vrije variabelen zijn

stelsel zonder vrije var.
mukg met rechts $a \neq 0$
mukg met overal 0

- In het geval van vrije var stellen we die iid opl. voor gelijk aan $\lambda, \mu, \dots \in \mathbb{R}$.
- Voor **stelsels met parametris** ga je op dezelfde manier te werk. Probeer de ERO $R_i \rightarrow \frac{1}{\lambda} R_i$ te vermijden tot dat het echt niet anders kan en maak gebruik van intelligent gewaardeerdheid om aan a bep waarde te zien.
↳ maak liever gebruik van $R_i \leftrightarrow R_j$ voor een leidende 1
- Speurkruis ook je opl. voor voor elk geval apart en definieer dan zeker **NIE** je parameter als zgn die niet die of die waarde.

1.3. Rekenen met matrices

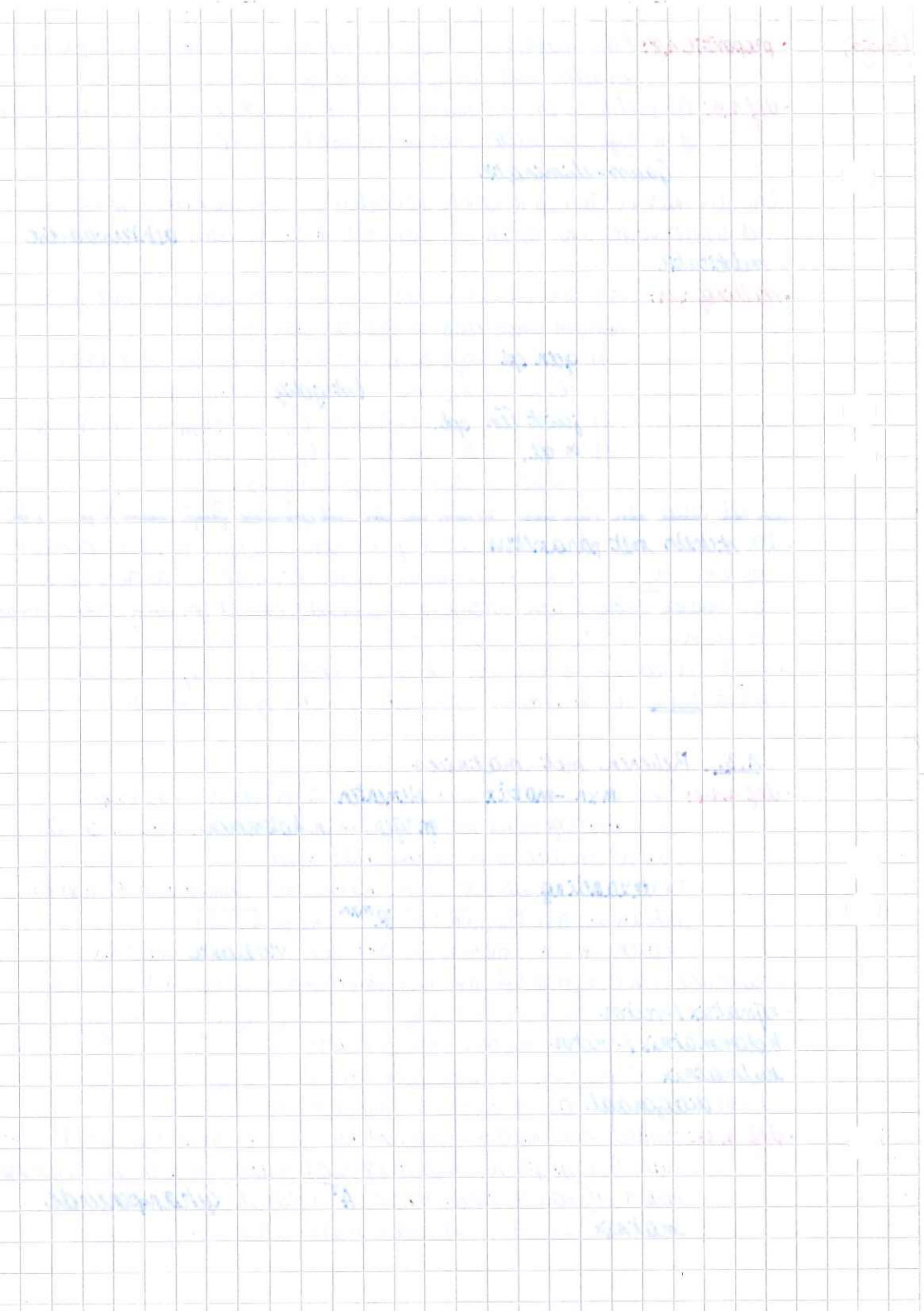
- **def 1.14:** Een $(m \times n)$ -matrix met **elementen** / componenten in $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) is een rechthoekig tabel met **m rijen** en **n kolommen**, waarvan op elke positie een reëel (resp complex) getal staat.

De **verzameling** van alle $(m \times n)$ -matrices met elementen in $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) noemen we als $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ of $\mathbb{R}^{m \times n}$ (resp. $\mathbb{C}^{m \times n}$)

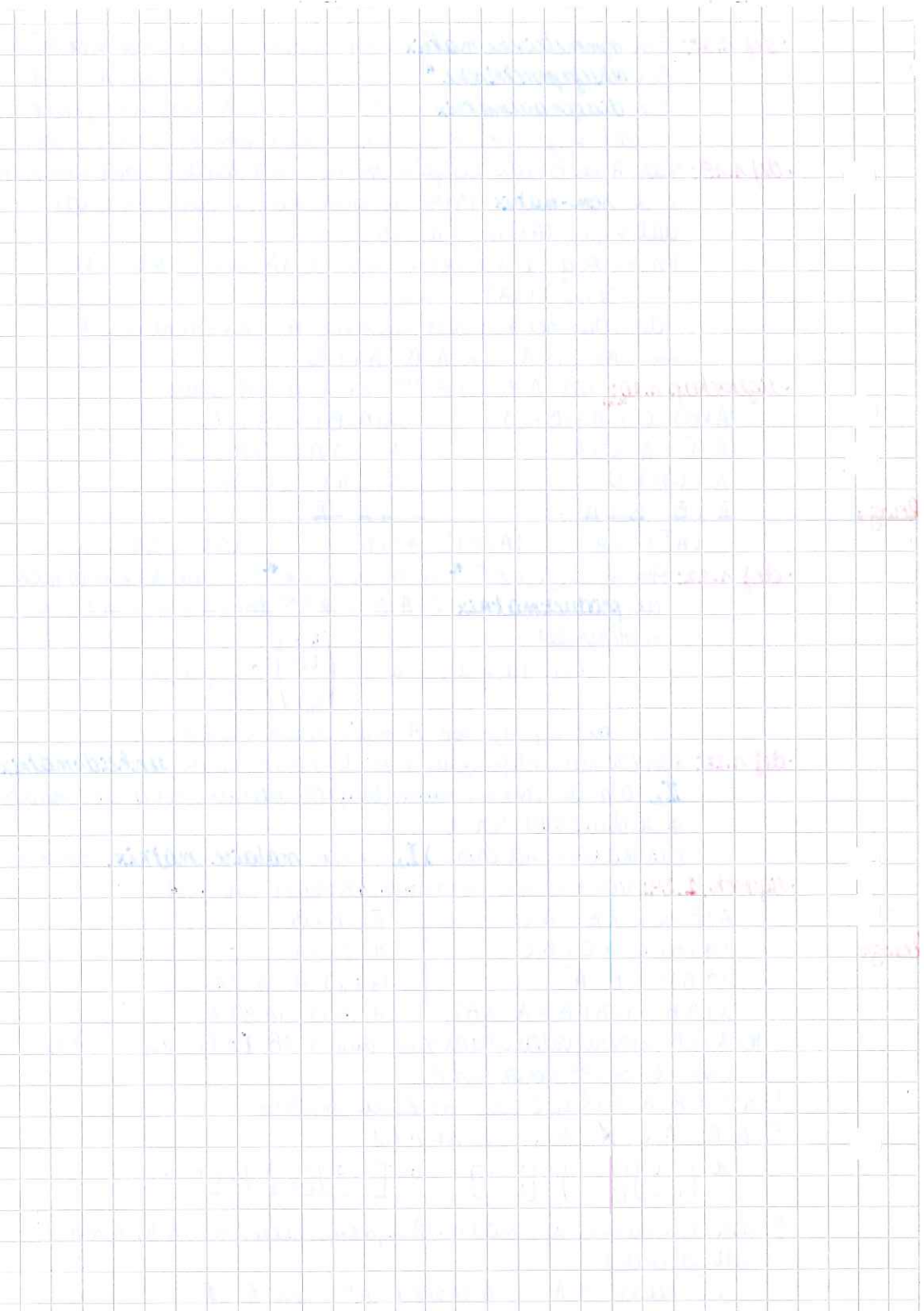
Indien $m=n$ spreken we over een **vierkante** matrix.

- 2 matrices A en B zijn gelijk als hun afmetingen gelijk zijn $\wedge \forall i, j: a_{ij} = b_{ij}$
- **rijmatrix** / **vector matrix** met 1 rij
- **kolommatrix** / **vector matrix** met 1 kolom
- **nulmatrix** O matrix met alle elementen $= 0: O_{m \times n} (\Leftrightarrow \forall i, j: a_{ij} = 0)$
- **hoofd diagonaal** van A zijn alle elementen $(A)_{ii}$ ($\forall i: a_{ii}$)

- **def 1.16:** Als A een $(m \times n)$ -matrix is, dan bestaat er een $(n \times m)$ -matrix A^T door A te spiegelen rond de diagonaal zodat de rijen als kolommen naast elkaar te staan komen. A^T is dan de **geïmponeerde matrix** van A . Hiervoor geldt $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$



- 3



• opdracht 1.25: $\exists$ $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dan:

1) als $AX=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, dan is $A=0$

2) als $AX=BX \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, dan is $A=B$

• definitie 1.26: Het spoor / trace $\text{Tr}(A)$ van een vierkant $(n \times n)$ -matrix A is de som v.d. elementen op de hoofddiagonaal van A .

$$\text{maw: } \text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$$

$$\hookrightarrow \text{eig: } \text{Tr}(A \cdot B) = \text{Tr}(B \cdot A), \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

• stelling 1.28: Een stelsel rx g.l. (met coëff. $\in \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$) heeft

1) ofwel geen opl.;

duidelijk

2) ofwel juist één opl.; alle var. zijn gebonden

3) ofwel ∞ veel opl. heeft vrije variabelen

aanpak 2
 $y_1 + \lambda(y_2 - y_1)$ ook opl.

1.4. Inverteerbaarheid van matrices en inverse matrices

• de inverse v.e. matrix is nodig om "delingen" uit te kunnen voeren
 $\hookrightarrow$ = maal inverse

• def. 1.29: veronderstel dat $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

matrix B is een links inverse van A als $B \cdot A = I_n$

matrix B is een rechts inverse van A als $A \cdot B = I_m$

$\hookrightarrow$ aangezien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ moet $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

• eig. 1.31: aangezien $A \cdot B = I_m \Rightarrow B^T \cdot A^T = I_m = I_m^T = (A \cdot B)^T$

dan: als A een links inverse matrix is van B , dan is B^T een links inverse matrix van A^T

• stelling 1.32: Als $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een links inverse B en rechts inverse C heeft, dan geldt dat $B=C$

• def. 1.33: Een $(n \times n)$ -matrix A is inverteerbaar / regulier / niet-singulier als er een $(n \times n)$ -matrix B bestaat die links en rechts inverse is van A . Deze matrix B is dan de inverse matrix van A :
 $B = A^{-1}$

1.32 en 1.33
 $\Rightarrow$ Als er geen inverse A^{-1} bestaat, is A niet-inverteerbaar / singulier
 $\Rightarrow$ De inverse A^{-1} is uniek indien hij bestaat.

• stelling 1.34: Als A en B inverteerbare matrices zijn (van dezelfde afmetingen), dan is ook hun product $A \cdot B$ inverteerbaar en bovendien geldt: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

• opdracht 1.35:

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad \text{als } A \text{ invert}$$

$$A \text{ invert} \Rightarrow A^T \text{ invert met } (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$B \text{ kolom nulken} \Rightarrow A \cdot B \text{ kolom nulken (analogie)} \Rightarrow B \text{ invert}$$

$$\text{als } A \text{ invert en } AB=AC \Rightarrow B=C$$

1.5. Elementaire operaties en elementaire matrices

10/10

1. The first part of the paper is devoted to the study of the

properties of the function $f(x)$ defined by the equation

$f(x) = \int_0^x f(t) dt$ for $x \in [0, 1]$.

It is shown that $f(x)$ is a continuous function on the interval

$[0, 1]$ and that $f(0) = 0$.

2. In the second part of the paper, we consider the function

$g(x) = \int_0^x g(t) dt$ for $x \in [0, 1]$.

It is shown that $g(x)$ is a continuous function on the interval

$[0, 1]$ and that $g(0) = 0$.

3. In the third part of the paper, we consider the function

$h(x) = \int_0^x h(t) dt$ for $x \in [0, 1]$.

It is shown that $h(x)$ is a continuous function on the interval

$[0, 1]$ and that $h(0) = 0$.

4. In the fourth part of the paper, we consider the function

$i(x) = \int_0^x i(t) dt$ for $x \in [0, 1]$.

It is shown that $i(x)$ is a continuous function on the interval

$[0, 1]$ and that $i(0) = 0$.

5. In the fifth part of the paper, we consider the function

$j(x) = \int_0^x j(t) dt$ for $x \in [0, 1]$.

It is shown that $j(x)$ is a continuous function on the interval

$[0, 1]$ and that $j(0) = 0$.

6. In the sixth part of the paper, we consider the function

$k(x) = \int_0^x k(t) dt$ for $x \in [0, 1]$.

1.5 Elementaire operaties en elementaire matrices

def 1.36: Een elementaire matrix $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is een matrix die men verkrijgt uit de eenheidsmatrix I_n door juist één ERO uit te voeren

1) $R_i \rightarrow \lambda R_i \quad (\lambda \neq 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\text{inverse} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\lambda & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

2) $R_i \leftrightarrow R_j$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

inverse: zelfde

3) $R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \lambda & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\text{inverse} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & -\lambda & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

stelling 1.37: Een ERO uitvoeren op een matrix A komt precies overeen met het links vermenigvuldigen van A met een element. matrix E_n corresponderend met de gewenste ERO.

stelling 1.38: Elementaire matrices zijn inverteerbare matrices. Hun inverse is een el. matrix van hetzelfde type

$$1) R_i \rightarrow \lambda R_i \Rightarrow R_i \rightarrow \frac{1}{\lambda} R_i$$

$$2) R_i \leftrightarrow R_j \Rightarrow R_i \leftrightarrow R_j$$

$$3) R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j \Rightarrow R_i \rightarrow R_i - \lambda R_j$$

! Wanneer de ERO's opgedragen kunnen gemaakt worden één ERO van hetzelfde type, zodat de inverse van A overeenkomt met de inverse van zijn ERO matrix en zal dus van hetzelfde type zijn.

stelling 1.39: Zij A een $n \times n$ matrix, dan zijn volgende beweringen equivalent

1) matrix A heeft links inverse B;

2) stelsel $A \cdot X = 0$ heeft enkel de oplossing $X = 0$;

3) matrix A is rij-equivalent met de eenheidsmatrix I_n ;

4) matrix A is een product van elementaire matrices;

5) matrix A is inverteerbaar met inverse B;

6) matrix A heeft rechts inverse B.

$\Rightarrow$ gevolg 1.40: praktische manier om inverteerbaarheid na te gaan + inverse te berekenen

stap 1 Schrijf de matrix A naast de eenheidsmatrix in 1 matrix $(A | I_n)$ (zelfde afmetingen)

stap 2 Voer nu op A ERO's uit (en tegelijk op I_n) in een poging A te herleiden tot de gereduceerde vorm

ofwel ontstaat er een nulrij $\Rightarrow$ NIET invert.

ofwel ontstaat er $A \cdot I_n = I_n$ en is A invert.

de matrix die op I_n is overgegaan is dan A^{-1}

Bewijs

voldoende om
aan te tonen
dat $AB = I_n$ of
 $BA = I_n$

• opdracht 1.42: voor A invert en $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$: λA invert met $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

1.6 LU-decompositie

elementen onder
op (over) diagonaal
zijn nul

• def 1.43: Een $(m \times n)$ matrix $A = (a_{ij})$ heet **bovendriehoeks** als $\forall i, j$:
 $i \leq j$ en $i \leq j$ en geldt dat als $i > j$, dan $a_{ij} = 0$.
 Wanneer $i > j$ dan $a_{ij} = 0$, dan spreken we over een
benedendriehoeksmatrix (upper and lower triangular)

• lemma 1.44: Voor $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ geldt:

- 1) als A en B benedendriehoeks zijn, dan is AB ook benedendriehoeks.
- 2) als A en B bovendriehoeks zijn, dan is AB ook bovendriehoeks

• stelling 1.45: Stel $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($q \in \mathbb{R}^{m \times n}$) die in trapvorm gebracht kan worden
 door ERO's zonder rijomwisselingen te gebruiken. Dan
 bestaat er een $(m \times m)$ -benedendriehoeksmatrix L (lower)
 en een $(m \times n)$ -bovendriehoeksmatrix U zodat **$A = LU$**

→ **LU-decompositie** van A

• Om A in trapvorm te brengen worden (indien nodig) rijomwisselingen nodig
 enkel ERO's vld vorm $R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j$ gebruikt. Aanpak zien we ~~van~~
~~naar~~ naar onder elementen weprepen, vermengvuldigen we enkel
 met elementaire benedendriehoeksmatrices. De resultierende matrix
 in trapvorm is natuurlijk bovendriehoeks → hier inverse ook benedendriehoeks

$$E_1 \cdot E_{k-1} \cdot \dots \cdot E_n \cdot A = U \Rightarrow A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_n^{-1} \cdot U = L \cdot U$$

↳ met versch. lereen $AX=B$ met wisselende B oplossen
 bepaal $A = L \cdot U$

$$\text{dan } AX=B \Rightarrow L \cdot U \cdot X=B \rightarrow \text{stel } U \cdot X=Y \text{ dan } LY=B$$

$$\text{dus } LY=B \quad \text{en } UX=Y \text{ op beide matrices}$$

• stelling 1.48: Zij A een inverteerbare matrix $(n \times n)$ die via ERO's in
 trapvorm gebracht kan worden zonder rij te verwisselen.
 Dan bestaat er een **uniëke** benedendmatrix L met
 enkel 1 op de diagonaal en een **uniëke** bovend-
 matrix U zodat $A = L \cdot U$.

↳ zie de LU-decompositie cursus p 45

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{heeft uniëke oplossing}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ is inverteerbaar}$$

H2 - Determinanten

2.1. Kennismaking in geval van 2×2 -matrices

- voor $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$: $A \cdot X = B$ heeft unieke oplossing $\Leftrightarrow A$ inverteerbaar
met $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow$ inverteerbaar $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$ (andere manier / kolom)

maken we hier nu een afbeelding van:

$$f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}: A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$$

f bepaalt / determiniert of A al dan niet inverteerbaar is

2.2. Determinant: definitie, bestaan en eigenschappen

2.2.1. Drie invloedrijke eigenschappen

- def. 2.1: Een afbeelding waarvan we nog niet weet of die bestaat).

$$f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}: A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \mapsto f(A)$$

met volgende eigenschappen:

D-1: $f(I_n) = 1$

D-2: $f(A)$ verandert van teken als men in A rijen van plaats ruilt

D-3: f is lineair in de eerste rij:

$$f\left(\begin{pmatrix} \lambda R_1 + \mu R_2 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}\right) = \lambda f\left(\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}\right) + \mu f\left(\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}\right) \quad \text{met } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

noemen we een determinantafbeelding.

- stelling 2.2: Als een afbeelding $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}: A \mapsto f(A)$ voldoet aan de hierboven genoemde eig. v.d. determinantafbeelding, dan voldoet hij eveneens aan volgende eigenschappen:

D-4: f is lineair in rij i voor elke $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

D-5: als er in A een nulrij is of als er twee gelijke rijen zijn, dan is $f(A) = 0$.

✓ quade van lineariteit:

$$f\left(\begin{pmatrix} R_1 \\ \lambda R_i \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}\right) = \lambda f\left(\begin{pmatrix} R_1 \\ R_i \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}\right) \quad \text{en dus} \quad f\left(\begin{pmatrix} \lambda R_1 \\ \lambda R_2 \\ \vdots \\ \lambda R_n \end{pmatrix}\right) = \lambda^n f\left(\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}\right) = f(\lambda) f\left(\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}\right)$$

- stelling 2.3: Als $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}: A \mapsto f(A)$ en det. afl. is, dan geldt:

1) het uitvoeren van de ERO $R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j$ ($j \neq i$) op A , verandert $f(A)$ niet

2) als E een elementaire matrix is, dan is

$$f(E) = \begin{cases} 1 & \text{als } E: R_j \rightarrow R_i + \lambda R_j \\ -1 & \text{als } E: R_i \leftrightarrow R_j \\ \lambda & \text{als } E: R_i \rightarrow \lambda R_i \end{cases}$$

3) als E een el. matrix is, geldt steeds dat $f(E \cdot A) = f(E) \cdot f(A)$

$\Rightarrow$ voor $B = E_k \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$ is $f(B) = f(E_k) \cdot \dots \cdot f(E_1) \cdot f(A)$

bewijs

bewijs

Introduction to the History of the World

1. The Beginning of the World

The beginning of the world is a topic that has fascinated humanity for centuries. There are many different theories about how the world began, but the most widely accepted one is the Big Bang theory. This theory suggests that the universe began as a single point of infinite density and temperature, which then expanded and cooled to form the galaxies and stars we see today.

2. The Evolution of Life

The evolution of life is another topic that has fascinated humanity. The theory of evolution, proposed by Charles Darwin, suggests that all life on Earth is descended from a common ancestor. This theory is supported by a large amount of evidence, including fossil records and genetic studies.

3. The History of the Earth

The history of the Earth is a long and complex one. It began with the formation of the Earth from a cloud of gas and dust. The Earth then cooled and formed a solid surface. The history of the Earth is filled with many different events, including the formation of the continents and the extinction of the dinosaurs.

4. The History of the Universe

The history of the universe is a vast and mysterious one. It began with the Big Bang, and has since expanded and cooled to form the galaxies and stars we see today. The history of the universe is filled with many different events, including the formation of the galaxies and the evolution of the stars.

5. The History of the Human Race

The history of the human race is a long and complex one. It began with the first hominids, who lived in Africa. The human race then spread to other parts of the world, and has since evolved into the many different races and cultures we see today.

bewijs

Stelling 2.4: Als $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}: A \mapsto f(A)$ een determinantaafbeelding is, dan geldt:

- 1) Als A een driehoeksmatrix is, dan is $f(A)$ gelijk aan het product van diagonaalelementen in A ($f(A) = \prod_{i=1}^n A_{ii}$)
- 2) A is invert $\Leftrightarrow f(A) \neq 0$
- 3) $f(A \cdot B) = f(A) f(B)$, $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- 4) $f(A^T) = f(A)$

$\Rightarrow$ **gevolg 2.5:**

- 1) Als determinantaafb. f bestaat, dan volgt dat $f(A)$ voll. bep. determineert of A al dan niet invert. is.
- 2) Als f determinantaafb. is, en A is invert, dan is $f(A^{-1}) = 1/f(A)$ ($f(AA^{-1}) = f(A)f(A^{-1}) = 1 \Rightarrow f(A^{-1}) = 1/f(A)$)
- 3) Omdat $f(A) = f(A^T)$ agn alle eig opzichzelf toe te passen op te bomen

2.2.2 Over permutaties en teken

Een **permutatie** van voor V is een **bijjectie** (loop) van V naar zichzelf dus $\sigma: 1, 2, \dots, n \rightarrow 1, 2, \dots, n$. Het 'herschikt' de elementen in een andere volgorde $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$.

S_n is de verzameling van alle permutaties van $1, \dots, n$
 $\# \text{permutaties} = \# S_n = n!$

REMIINDER: bijjectie $f: A \rightarrow B$ wilt zeggen dat elke $a \in A$ afgebeeld op beeld uit B en elk element uit B juist 1 el. uit A heeft zodat $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$.

def 2.6: Een **transpositie** is een permutatie die 2 elementen verwisselt en alle andere elementen op zichzelf afbeeldt.

Stelling 2.7: Elke permutatie in S_n is een samenstelling van transposities.

def 2.8.1: Zij $\sigma \in S_n$ of anders σ is een permutatie van voor $1, \dots, n$

1) Zij i en j verschillende elementen uit $1, 2, \dots, n$.

Het **keppel** (i, j) is een **inverse** van σ als i, j en $\sigma(i) > \sigma(j)$.

2) Het **teken** van σ (not: $\text{sgn}(\sigma)$) is $+1$ als het # inverses van σ even is en -1 als dat # oneven is.

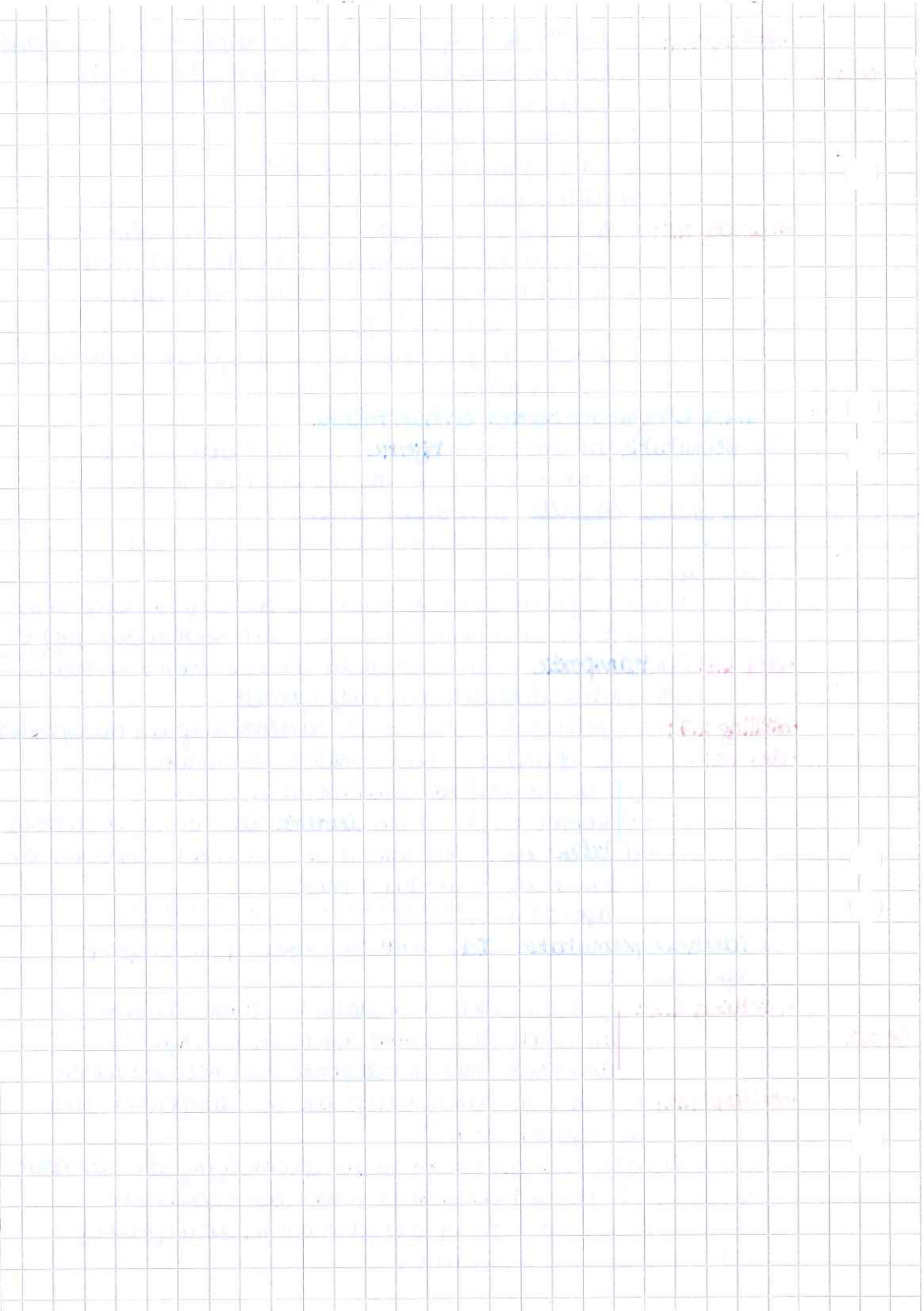
$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\# \text{inverses van } \sigma} \quad \begin{cases} +1 \rightarrow \text{even } \sigma \\ -1 \rightarrow \text{oneven } \sigma \end{cases}$$

de **identieke permutatie**, Id_n beeldt elk element op zichzelf af.
 $\text{sgn}(\text{Id}) = +1$

Stelling 2.10: Zij σ een willek. permutatie en τ een transpositie in S_n .
 Dan geldt dat $\text{sgn}(\tau \circ \sigma) = -\text{sgn}(\sigma)$.
 Samenstellen met een transpositie verwisselt het teken.

$\Rightarrow$ **Stelling 2.11:** Zij σ in S_n een samenstelling van m transposities. Dan is $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^m$

$\Rightarrow$ elke permutatie kan geschreven w als opeenvolging van transposities
 $\text{Id} = \tau \circ \tau$. Het # transposities is voor een bepaalde permutatie altijd even of altijd oneven, naargelang het teken van de permutatie.



2.2.3. Er is juist een determinantafbeelding ($\forall n \geq 1$)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

dan is $R_{j_1} = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}) = \sum_{j=1}^n a_{1j} e_j$

dus

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} e_{j_1} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} e_{j_n} \end{pmatrix}$$

en $e_i = i^{\text{te}} \text{ rij } I_n$:

$$e_1 = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)$$

$$e_2 = (0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)$$

$$\vdots$$

$$e_n = (0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1)$$

en indien determinantafbeelding effectief bestaat, volgt dat

$$f(A) = f\left(\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} e_{j_1} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} e_{j_n} \end{pmatrix}\right)$$

lineariteit
w.r.t. rij

$$= \sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} f\left(\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ \sum_{j=2}^n a_{2j} e_{j_2} \\ \vdots \\ \sum_{j=n}^n a_{nj} e_{j_n} \end{pmatrix}\right)$$

lineariteit
overal

$$= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n=1}^n a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} f\left(\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix}\right)$$

behouden we nu even

$$f\left(\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix}\right)$$

voor elk n -tal $(j_1, j_2, \dots, j_n)$

is er dus een matrix

deze matrix is opgebouwd uit rijen ~~die komen van~~ ~~de determinant~~ ~~met de betonnen~~ I_n

$$\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix}$$

aangezien de det. v. matrix met 2 dezelfde rijen 0 geeft

mogen we $f\left(\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix}\right)$ met $j_k = j_l$ met $l \neq k$ buiten beschouwing
de matrix die we beschouwen is d. n. m. in dus een permutatie ~~van~~ σ van de rijen van I_n (in S_n)

dus voor een mogelijke permutatie geldt

$$f\left(\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix}\right) = \text{sgn}(\sigma) f(I_n) = \text{sgn}(\sigma)$$

we krijgen dan voor onze som over alle permutaties

$$f(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

met $\sigma(i)$ het
nummer van
permutatie op
rij i

aangezien de eigenschappen van de determinant-

afbeelding (B-1, D-2 & D-3) gelden (bewijs)

is de determinantafbeelding als volgt volledig en uniek

bepaalt $\det: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}: A \mapsto \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$

- def 2.15: Nu we weten dat de determinantopbouw bestaat en uniek is (voor elke $n \geq 1$) kunnen we spreken van de determinant van een vierkante matrix A .

notatie: $\det(A)$, $\det A$ of $|A|$ of $|A| = |A|$

• zie pgs in handboek voor Bielevaen beschreven manier om $\det$ te berekenen + regel van Sarrus

det kan ook nog altijd berekend w door je ERO's bij te houden terwijl je een smatrix maakt q door...

2.2.4. Ontwikkelen naar een rij of kolom

- def 2.19: Zij A een $(n \times n)$ -matrix. Voor elke $i, j \in \{1, \dots, n\}$ is

- de i -de **cofactor** C_{ij} van A het geheel van de termen in $\sum_{c=1}^n (-1)^{i+c} a_{ic} a_{2c} a_{3c} \dots a_{nc}$ voor $\det(A)$ waarin a_{ij} optreedt na afzonderen van a_{ij}

- de i -de **minor** van A de $(n-1) \times (n-1)$ -matrix M_{ij} verkregen door uit A de i -de rij en j -de kolom te schrappen

↳ in menentaal

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

- stelling 2.20: Zij A een $(n \times n)$ -matrix, dan is

- de ontwikkeling naar de i -rij van $\det(A)$ gelijk aan

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij})$$

- de ontwikkeling naar de j -kolom van $\det(A)$ gelijk aan

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij})$$

- belangrijk voorbeeld: Determinant van Vandermonde

stel $x_1, x_2, x_3, \dots \in \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$

$$\text{dan } \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1$$

$$\text{en } \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \\ x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)(x_3 + x_1) \end{pmatrix} + 0 + 0$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 + x_1 \\ 1 & x_3 + x_1 \end{pmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

voor $n \geq 2$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i > j}} (x_i - x_j)$$

2.2.5. De toegevoegde matrix of adjunctmatrix

Def 2.23: Voor een vierkante matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vormen we de matrix

$$\text{adj}(A) = (C_{ji})_{1 \leq j, i \leq n}^T = \text{de getransponeerde van de cofactormatrix}$$

die we de **adjunctmatrix** of **toegevoegde matrix** van A noemen

de **cofactormatrix** is de matrix waarbij de elementen overeen komen met $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$. We krijgen dan $(C_{ji})_{1 \leq j, i \leq n}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Stelling 2.23: Voor $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ geldt:

$$A \cdot \text{adj}(A) = \text{adj}(A) \cdot A = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{pmatrix} = \det(A) \cdot I_n$$

⇒ gevolg 2.24: Als de matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inverteerbaar is, maar als $\det(A) \neq 0$, dan geldt: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$

$$\text{want } A \cdot \text{adj}(A) = I_n \cdot \det(A)$$

$$\Rightarrow A \cdot \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} = I_n$$

2.2.6. De formule van Cramer

$AX=B$ met A invert. = regel van Cramer

$$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) \cdot B$$

als $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ dan geldt

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} (C_{i1} C_{i2} C_{i3} \dots C_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^n b_k C_{ik}$$

$$= \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{i(i-1)} & b_i & a_{i(i+1)} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

alsof ontworpen naar kolom i met goede plaats d.v.

$$\text{d.v.} \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

2.3. Vektorminterpolatie

zie HB

1. Introduction

2. Background

3. Methodology

4. Results

5. Conclusion

6. References

7. Appendix

H3 - Vectorruimten

3.1. Het begrip vectorruimte

def 3.2: Een **commutatieve groep** is een verzameling V met een bewerking ('optelling'/'som') $+$: $V \times V \rightarrow V$ zo dat voldaan is aan de volgende eigenschappen:

1. **associativiteit**: $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3) \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V$

2. **neutraal element**: er bestaat in V een element, 0 , zodanig dat $0 + v = v = v + 0 \quad \forall v \in V$

3. **tegengesteld element**: $\forall v \in V: \exists v' \in V: v + v' = v' + v = 0$

4. **commutativiteit**: $v_1 + v_2 = v_2 + v_1 \quad \forall v_1, v_2 \in V$

$\hookrightarrow$ commutatieve groep $(V, +)$

def 3.3: Een **reële vectorruimte** $(\mathbb{R}, V, +)$ bestaat uit een commutatieve groep $(V, +)$ samen met een uitwendige bewerking, de **reële vermenigvuldiging**, $\mathbb{R} \times V \rightarrow V: (\lambda, v) \mapsto \lambda v$

zodat volgende eigenschappen gelden:

1. **distributiviteit-1**: $\lambda(v+w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v, w \in V$

2. **distributiviteit-2**: $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall v \in V$

3. **gemengde associativiteit**: $\lambda_1(\lambda_2 v) = (\lambda_1 \lambda_2) \cdot v \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall v \in V$

4. **coëfficiënt 1**: $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$

Hier zijn $\lambda \in \mathbb{R}$ de **coëf. of scalars**, de elementen $v \in V$ de **vectoren** en het neutraal element 0 is de **nulvector**.

opmerking 3.5: eigenschappen neutraal element (NE) en tegenst.el. (TE)

1. Een vectorruimte is nooit leeg (steeds minstens NE: 0). Hg is immers steeds gebouwd met een comm. groep $\Rightarrow$ minstens NE

2. het NE van de groep is uniek:

stel $\exists 0_1, 0_2$: dan geldt $0_1 + 0_2 = 0_1$ en $0_2 + 0_1 = 0_2 \Rightarrow 0_1 = 0_2$

3. $\forall v \in V: \exists v' \in V: v + v' = 0 = v' + v \rightarrow$ TE

Ook TE is uniek. stel v' en v'' beide TE van v

dan $v' = v' + 0 = v' + (v + v'') = (v' + v) + v'' = 0 + v'' = v''$

notatie: het TE van v is $-v$

lemma 3.7: In een vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ geldt $\forall v, w, x \in V$:

$$v + x = w + x \Rightarrow v = w$$

lemma 3.8: In een vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ geldt $\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $0v = 0 = \lambda 0$

2. $(-1)v = -v = 1(-v)$

3. $(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v)$

opmerking 3.9: In $(\mathbb{R}, V, +)$ geldt $\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda v = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee v = 0$$

zie volgende pagina

Verdichtungsarten

1. Wortverdichtung
a. Metonymie

Beispiel: Das weiße Hemd
→ Reinheit

2. Figuren
a. Simile

Beispiel: Wie ein Schmetterling

3. Stilfiguren
a. Metapher

Beispiel: Das Leben ist ein Traum
→ Lebensweisheit

4. Reim
a. Endreim

Beispiel: Die Nacht ist so still

b. Stichreim

Beispiel: Die Nacht ist so still

c. Reimwort

Beispiel: Die Nacht ist so still

d. Reimreihe

Beispiel: Die Nacht ist so still

e. Reimpaar

Beispiel: Die Nacht ist so still

3.2. Deelruimten en lineaire combinaties

def. 3.10: Als $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte is en U een deelverzameling van V zodat $(\mathbb{R}, U, +)$ met dezelfde optelling en scalaire vermenigvuldiging als in V ook een vectorruimte is, dan noemen we $(\mathbb{R}, U, +)$ een (lineaire) **deelvectorruimte** of (lin.) **deelruimte** van $(\mathbb{R}, V, +)$.

stelling 3.11: Deelruimtecriterium

Zij gegeven de vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$. Een deelverzameling U van V ($U \subseteq V$) is een deelruimte **asv**:

• $U \neq \emptyset$ (U niet leeg)

• $\forall x, y \in U: x + y \in U$

• $\forall x \in U; \forall \lambda \in \mathbb{R}: \lambda x \in U$

of equivalent kunnen:

• $U \neq \emptyset$

• $\forall x, y \in U; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \lambda x + \mu y \in U$

• Een lineaire som van het type $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$ met $\lambda_i \in \mathbb{R}, u_i \in U$ is een **lineaire combinatie** van de vect $u_1, u_2, \dots, u_n$. not $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$

propositie 3.14: De doorsnede van een aantal deelruimten van vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ is opnieuw een deelruimte van V .

def. 3.15: Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte en D een niet-lege deelverzameling van V . De deelvectorruimte van $(\mathbb{R}, V, +)$ **voortgebracht door D** of **opgespannen door D** is $\left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, x_1, \dots, x_n \in D \text{ en } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}$

notatie: $\text{vect}(D)$, $\text{span}(D)$ of $\langle D \rangle$

Als D eindig is, noteren we ook $\text{vect}\{x_1, \dots, x_k\}$ voor $D = \{x_1, \dots, x_k\}$

Als $D = \emptyset$, dan is $\text{vect}(D) = \{0\}$.

• maw: $\text{vect}(D)$ is de vectorruimte die alle mogelijke lin. comb van vect in D bevat. Het is ook de 'kleinste deelruimte van V die D omvat'

opdracht 3.18: Zij D een deelverzameling van $(\mathbb{R}, V, +)$

$\text{vect}(D)$ is dan de kleinste deelruimte die D omvat

Er geldt ook $\text{vect}(D) = \bigcap_{U_i: D \subseteq U_i} U_i = \bigcap_{U: D \subseteq U} U$

3.3. Som en directe som van deelruimten

def. 3.19: Veronderstel dat $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte is, met deelvectorruimten U en W . Dan is de verzameling $\{u + w \mid u \in U, w \in W\}$ een deelvectorruimte van V . Deze deelruimte is de **somruimte** of **som** van U en W , not $U + W$.

Meer algemeen: als $U_1, \dots, U_k$ deelruimten zijn van V , dan definiëren we de **somruimte**

$\sum_{j=1}^k U_j = U_1 + U_2 + \dots + U_k = \left\{ \sum_{j=1}^k u_j \mid u_j \in U_j, \forall j=1, \dots, k \right\}$

def. 3.20: Een somruimte $\sum_{j=1}^k U_j$ noemen we een **directe som** als elk element van $\sum_{j=1}^k U_j$ op precies één manier te schrijven valt als som van vect uit elk van de deelruimten. En betekent dus voor alle $v \in \sum_{j=1}^k U_j$ unieke vectoren $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \dots, u_k \in U_k$ zodat: $v = u_1 + u_2 + \dots + u_k$

notatie: $\oplus_{j=1}^k U_j = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$

3.2. Definition of Linear Operators

Let V and W be vector spaces over a field F . A linear operator T from V to W is a mapping $T: V \rightarrow W$ such that

$$T(u+v) = T(u) + T(v) \quad \text{and} \quad T(cu) = cT(u)$$

for all $u, v \in V$ and $c \in F$. If $V = W$, then T is called a linear transformation on V . The set of all linear operators from V to W is denoted by $\mathcal{L}(V, W)$.

Example: Let $V = W = \mathbb{R}^n$. Then a linear operator T can be represented by a matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ such that $T(x) = Ax$ for all $x \in \mathbb{R}^n$.

The zero operator 0 is defined by $0(x) = 0$ for all $x \in V$.

Example: Let $V = \mathbb{R}^2$. Define $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ by $T(x, y) = (y, x)$. Then T is a linear operator.

Proof: Let $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ and $c \in \mathbb{R}$. Then

$$T((x, y) + (x', y')) = T(x+x', y+y') = (y+y', x+x') = (y, x) + (y', x') = T(x, y) + T(x', y')$$

$$T(c(x, y)) = T(cx, cy) = (cy, cx) = c(y, x) = cT(x, y)$$

Therefore, T is a linear operator.

3.3. Matrix Representation of Linear Operators

Let V and W be vector spaces over a field F . Let $\{v_1, \dots, v_n\}$ be a basis for V and $\{w_1, \dots, w_m\}$ be a basis for W . Let $T: V \rightarrow W$ be a linear operator. The matrix representation of T with respect to these bases is the matrix $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(F)$ such that

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \quad \text{for } j = 1, \dots, n$$

Example: Let $V = W = \mathbb{R}^2$. Let $\{v_1, v_2\}$ be a basis for V and $\{w_1, w_2\}$ be a basis for W . Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be the linear operator defined by $T(v_1) = w_1$ and $T(v_2) = w_2$. Then the matrix representation of T is the identity matrix I_2 .

Example: Let $V = W = \mathbb{R}^2$. Let $\{v_1, v_2\}$ be a basis for V and $\{w_1, w_2\}$ be a basis for W . Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be the linear operator defined by $T(v_1) = w_2$ and $T(v_2) = w_1$. Then the matrix representation of T is the permutation matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Example: Let $V = W = \mathbb{R}^2$. Let $\{v_1, v_2\}$ be a basis for V and $\{w_1, w_2\}$ be a basis for W . Let $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be the linear operator defined by $T(v_1) = w_1 + w_2$ and $T(v_2) = w_1 - w_2$. Then the matrix representation of T is $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

bewijs.

• opdracht 3.21: Zij $U_1, \dots, U_k$ deelruimten van vektorruimte V .

$$\text{Dan } U_1 + \dots + U_k = \text{vect}(U_1 \cup \dots \cup U_k)$$

De somruimte is wel dezelfde een deelruimte.

• propositie 3.22: Gegeven in een vektorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$

1. Zij U_1 en U_2 deelruimten van V . Dan geldt dat $W = U_1 \oplus U_2$ and

a) $W = U_1 + U_2$ en

b) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

2. Algemeener: Zij $U_1, U_2, \dots, U_k$ deelruimten van V , dan is

$$W = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k \quad \text{and}$$

a) $W = U_1 + U_2 + \dots + U_k$ en

b) $\forall i = 1, \dots, k : U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) = \{0\}$

3.4. Lineaire onafhankelijkheid, basis en dimensie

3.4.1. Lineaire afhankelijkheid en onafhankelijkheid

• def 3.28: Gegeven is een vektorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$. Een deelverzameling D van V is **lineair afhankelijk** / **niet vrij** als er een vector bestaat in D die te schrijven is als lineaire combinatie van (andere) vekt. van D .
 D is **lineair onafhankelijk** / **vrij** als D niet lineair afhankelijk is, als de dus geen enkel vekt in D bestaat die een lin. comb. van andere vekt in D .

• propositie 3.23: Gegeven is een vektorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ en een niet-lege deelverzameling D . Dan is D vrij and de enige lin. comb. van vekt in D die de nulvekt oplevert, die lin. comb. is waarin alle coëf. nul zijn.

symt: $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_+, \text{ willek } \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, \text{ willek onderlingversch } v_1, v_2, \dots, v_k \in D : \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0 \right)$

Voor eindige D , $D = \{v_1, \dots, v_n\}$, in D vrij

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \right)$$

• opm onafh. vekt. vekt. $\Leftrightarrow$ is vekt. $\neq$ vrij als nulvekt te schrijven oneindig $\neq$ lin. comb. NIET is als niet-triviale lin. comb. van een eindige $\neq$ vektoren

3.4.2. Basis, dimensie en coördinaten

• def 3.31: Voor een gegeven vektorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ is een deelverzameling D van V **voortbrengend** als $\text{vect}(D) = V$. V is dan **opgespannen** door D .
 Als er een eindige deelverzameling D bestaat die V voortbrengt, is V **eindig voortgebracht**.

• def 3.32: In een vektorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ is een deelverzameling β een **basis** van V als β voortbrengend en vrij is.

Als $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ eindig β , zeggen we dat de vekt $v_1, \dots, v_n$ een **basis** vormen van V .

• $\beta = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)\}$ is de **standaardbasis** voor $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +)$

Stelling 3.35: Lemma van Steinitz

Zig $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte, dan geldt:

1. Als er een voortbrengend deel bestaat voor V met m elementen, dan is elke deelverzameling van V met MEER dan m elementen linear afhankelijk
2. Als er in V een rij deel bestaat met n elementen, dan is elke deelverzameling van V met MINMER dan n elementen not voortbrengend voor V .

$\Rightarrow$ **gevolg 3.36:** Als U in een vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ een voortbrengend deel is voor V met m elementen en een rijge deelverzameling met n elementen, dan is $n \leq m$.

$\Rightarrow$ **gevolg 3.37:** Als $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte is die een basis heeft met n vectoren, dan heeft elke andere basis van V ook n vectoren.

def. 3.38: Zig $(\mathbb{R}, V, +)$ een (niet-triv.) vectorruimte. Als V een eindige basis heeft, is het aantal elementen van die basis de **dimensie** van V , not: $\dim_n V$. In het geval van complexe vektorruimte $(\mathbb{C}, V, +)$: not: $\dim_{\mathbb{C}} V$. Als uit de context duidelijk is over welke coëff het gaat, not: $\dim V$. Als V geen eindige basis heeft, is V oneindigdimensionaal.
 $\dim(\emptyset) = 0$ (basis $\emptyset$)

Stelling 3.40: Veronderstel dat $(\mathbb{R}, V, +)$ een vektorruimte is van $\dim n$. Dan geldt:
 1) elke rijge verzameling van V kan uitgebreid w tot een basis van V .
 2) elke eindige voortbrengende verzameling van V kan gereduceerd w tot een basis van V (door vectoren te schrappen)

Defin. 3.43: Zig V een n -dimensionale vectorruimte, dan geldt:
 1) n linear onafhankelijke vectoren in V vormen een basis van V
 2) n voortbrengende vectoren van V vormen een basis van V .

Stelling 3.44: Zig $(\mathbb{R}, V, +)$ een n -dim vektorruimte en $v_1, \dots, v_n \in V$.
 Dan geldt dat $\{v_1, \dots, v_n\}$ een basis is van V

$\Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ een rij deel is van V ;

$\Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ een voortbrengend deel is van V

! B kan n rij $n \Rightarrow$ in bewijzen mag je NIET zeggen "Zig $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ "

Stelling 3.45: Zig $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte en $\beta \subset V$. Dan zijn volgende beweringen equivalent.

1) β is een basis van V ;

2) β is maximaal rij;

3) β is minimaal voortbrengend.

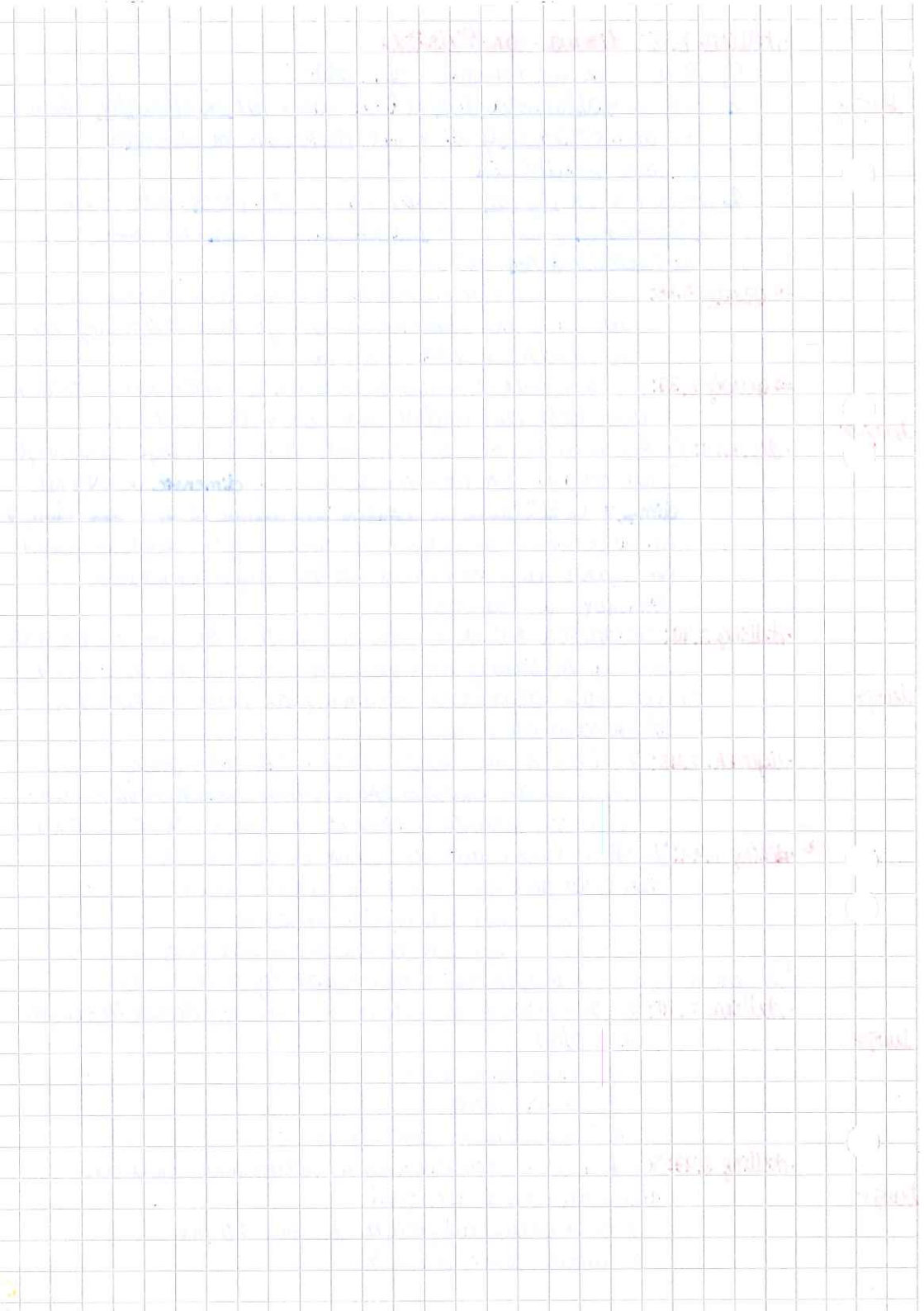
B is rij en elke verzameling van V die B bevat omvat, is niet meer rij

β is voortbrengend en elke strikt deelverzameling van β is niet meer voortbrengend voor V

Stelling 3.47: Zig $(\mathbb{R}, V, +)$ een eindigdimensionale vectorruimte en U een deelruimte van V . Dan geldt:

1) U is eindig voortbrengend en $\dim U \leq \dim V$

2) $\dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V$.



• **stelling 3.49:** Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een vektorruimte en veronderstel dat $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ een basis van V , dan kan elke vect v op unieke manier als lin comb. van basisvect. uitgedrukt worden. Er ontstaat een bijzondere afbeelding $\omega_\beta: V \rightarrow \mathbb{R}^n: v \mapsto \omega_\beta(v)$ die v afbeeldt op het tel. coördinaten dat correspondeert met v tov basis β . Deze afbeelding noemen we de coördinatenafbeelding bepaald door β .

• Voor $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ met $a_i \in \mathbb{R}$, ~~en~~
dan a_i de coördinaten en $\omega_\beta(v) = (a_1, \dots, a_n)$ de coördinaat v tov β
• extra: det $\neq 0 \Rightarrow$ vect. in te bouwen (d. w. z.) $\hookrightarrow$

3.4.3. Een en directe som (opnieuw)

• **stelling 3.53:** Als de vektorruimte V eindigdimensionaal is, dan geldt voor willekeurige deelruimten U en W van V dat
 $\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$

• **stelling 3.56:** We veronderstellen dat de vektorruimte V eindigdimensionaal is. Zij $U_1, \dots, U_k$ deelruimten van V zodat $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$. Als voor elke i de verzameling $\beta_i \in U_i$ een basis is van U_i , dan $\hookrightarrow \beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_k$ een basis van V en bijz. geldt dat:
 $\dim V = \sum_{i=1}^k \dim U_i$

• **def. 3.58:** In de vektorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ is een deelruimte W ~~een~~ complementaire deelruimte van de deelruimte U als $V = U \oplus W$.

• **stelling 3.60:** Als de vektorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ eindigdimensionaal is, dan heeft elke deelruimte van V een complementaire deelruimte.

3.5. Vectorruimten geassocieerd aan een matrix

3.5.1. Nulruimte, rijruimte en kolomruimte van een matrix

• **def. 3.61:** Zij $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Elke rij r_i behoort dan tot $\mathbb{R}^n$ en elke kolom c_j tot $\mathbb{R}^m$.
We definiëren de volgende vektorruimten:

1. $R(A) = \text{vect} \{ r_1, r_2, \dots, r_m \}$, de rijruimte van A

2. $C(A) = \text{vect} \{ c_1, c_2, \dots, c_n \}$, de kolomruimte van A

3. $N(A) = \{ X \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot X = 0 \}$, de nulruimte van A (d. w. z.) met bijhorende dimensie: 1. rijrang

2. kolomrang

3. nuliteit (= # rijen van n. l. homogene stelsel)

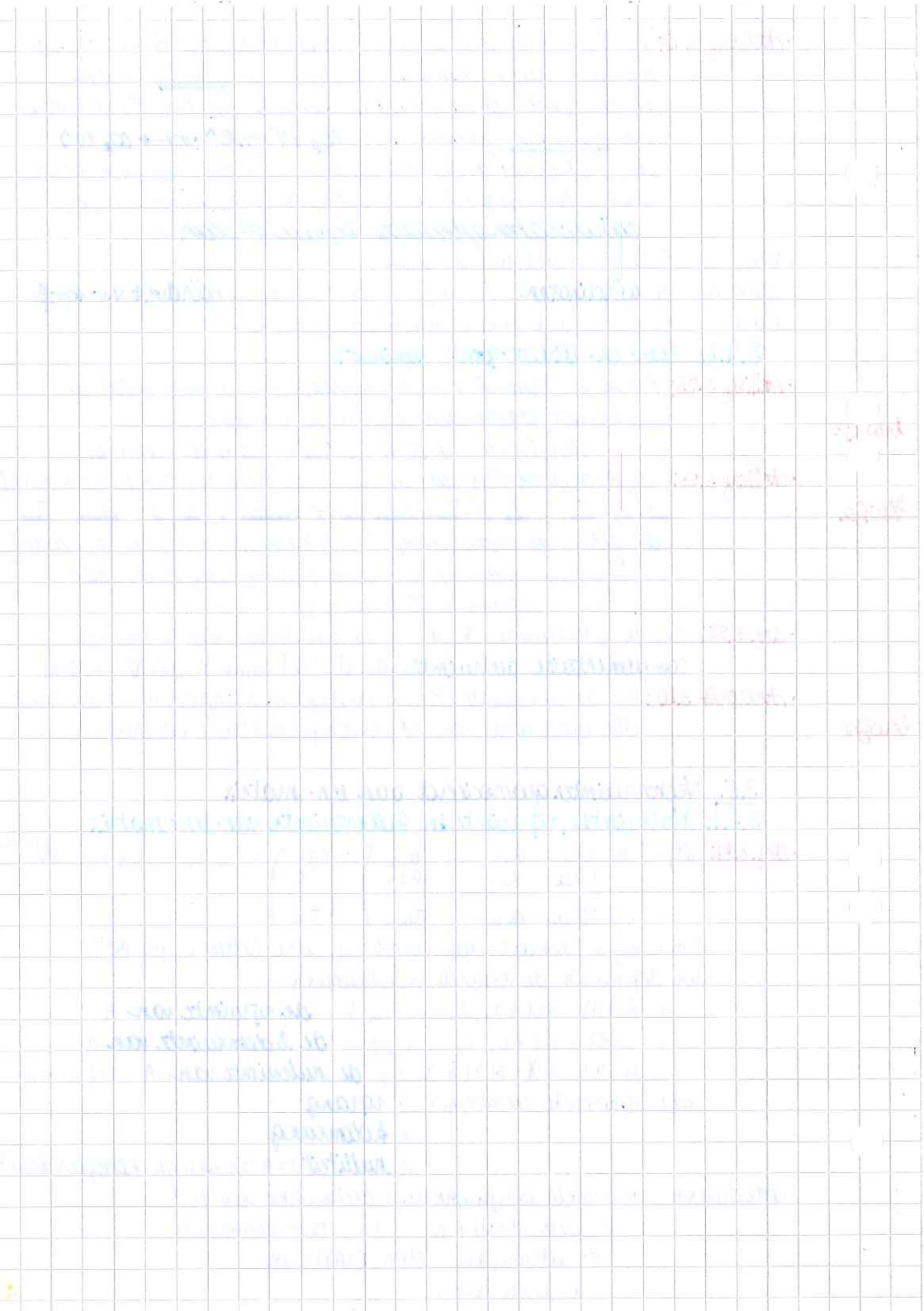
• **opmerkingen:** - nulruimte en rijruimte zijn deelruimten van $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \dim(R(A)) \leq n$ en $\dim(N(A)) \leq n$

$\Rightarrow$ kolomruimte: $\dim(C(A)) \leq m$

- ... (volgende pag.)

oplossingsverzameling v. l. homogene stelsel met A als coëfficiëntenmatrix



- voor $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ is $A \cdot X = x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_n c_n$

duw AX in een lin comb van kolommen van A

duw voor $B \in \mathbb{R}^m$: $AX=B$ is oplosbaar $\Leftrightarrow B$ lin comb kolommen van $A \Leftrightarrow B \in C(A)$

$\hookrightarrow$ oplosbaarheidvoorwaarde van Herstein $AX=B$

• stelling 3.64: Veronderstel dat U de rijgereduceerde matrixvorm is van $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (geen willek. trapvorm van A verburger met Gauss-eliminatie). Dan geldt:

$$1. N(A) = N(U)$$

$$2. R(A) = R(U)$$

Bovendien geldt: $\dim_{\mathbb{R}} N(A) + \dim_{\mathbb{R}} R(A) = n$

ran = #rijen van + #gebonden

- m.a.w. $\dim$ nulruimte A + rang A = #kolommen van A .

• stelling 8.65: Veronderstel dat A en B matrices zijn zo dat AB bepaald is, dan geldt:

$$1. N(AB) \supseteq N(B)$$

$$2. C(AB) \subseteq C(A)$$

$$3. R(AB) \subseteq R(B)$$

3.5.2. Basis van de nulruimte, rijruimte en kolomruimte

• matrix A en rijgereduceerde trapvorm U van A

$\Rightarrow$ nulruimte: stel $AX=UX=0$ maken

• geen rijen van $\Rightarrow$ oplosbaar = $\emptyset \Rightarrow$ kern = $\emptyset$ (A invert)

(A niet invert)

• rijen van $\Rightarrow$ oplosbaar via achterwaartse rijen v.l. $A(-2x_2 + x_5, x_2, 3x_3, -4x_5, x_5)$

$\Rightarrow$ kern: elke rijen van achtereen volgens rijen te stellen aan 1 en de andere rijen van aan 0

$$\text{v.l. } d(-2, 1, 0, 0, 1), (1, 0, -3, -4, 1)^T$$

$\rightarrow$ rijruimte: de niet-nulrijen in rijgereduceerde matrix U

$\rightarrow$ kolomruimte: kern in U kijkt welke rijen gebonden zijn.

in A laat je dan alle kolommen zonder

gebonden / met rijen van weg (ageneer lin comb uit andere)

de afgebonden kolommen zijn je basis

$\rightarrow$ van voortbrengend deel tot een kern

= vekt $v_1, \dots, v_k$

1. van "deel tot willek. basis:

constructeer $(n \times n)$ -matrix A waarin elke $R_i = v_i^T$ (ncomp van n in $\mathbb{R}^n$ even A te plaatsen)

bepaal basis van $R(A)$

2. voortbrengend deel uitdunnen tot basis:

constructeer $(n \times k)$ matrix B ~~was~~ $= A^T$ waarin elke $C_i = R_{v_i} = v_i$ (de ncomp van n in $\mathbb{R}^k$ even A te plaatsen)

bepaal basis van kolomruimte $C(B) = C(A)$

H4 - Lineaire afbeeldingen en lineaire transformaties

4.1. Definitie en voorbeelden

def. 4.1.: Vooronderstel dat $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ twee vektorruimten zijn. Een afbeelding $L: V \rightarrow W$ noemen we een **lineaire afbeelding** als:

- 1) $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$ voor alle $v_1, v_2 \in V$
- 2) $L(\lambda v) = \lambda L(v)$ voor alle $v \in V$, voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$

Een afbeelding is lineair als ze compatibel is met de afbakening vektorruimte. Een **lineaire transformatie** is een lineaire afbeelding van een vektorruimte naar zichzelf.

Een lin. afb $(\mathbb{R}, V, +) \rightarrow (\mathbb{R}, W, +)$ is een **lineaire vorm**. $V \rightarrow \mathbb{R}$: vektor $\rightarrow$ getal
Voor complexe vektorruimten: afgeleid met $\mathbb{C}$ ipv $\mathbb{R}$, want $\lambda \in \mathbb{C}$

lemma 4.2: Een afbeelding $L: V \rightarrow W$ tussen twee vektorruimten is een lineaire afbeelding

$$\Leftrightarrow L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2), \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall v_1, v_2 \in V$$

=> prop 4.3: Als $L: V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding is, dan geldt:

- 1) $L(0) = 0$ en $L(-v) = -L(v)$, $\forall v \in V$
- 2) $L(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i L(v_i)$, $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \forall v_1, \dots, v_n \in V$
maar lin. afb. 'bewaren' lin. comb.
- 3) een lin. afb. ligt volledig vast door de beelden van basis

rel. $V \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\rightarrow$ een lin. afb. bepaalt:

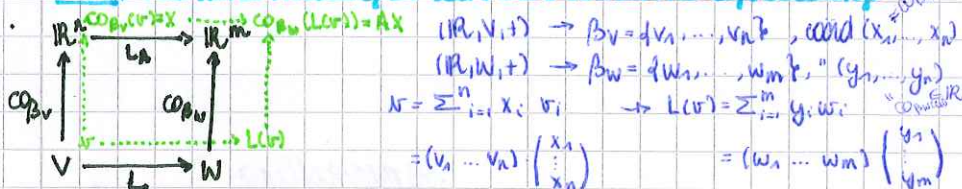
$$L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m: X \mapsto L_A(X) = A \cdot X$$

• coörd. afbeelding: $\text{co}_B: V \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\hookrightarrow$ lin. afb. λ bijtrefte $\rightarrow \text{co}_B(v+w) = \text{co}_B(v) + \text{co}_B(w)$; $\text{co}_B(\lambda v) = \lambda \text{co}_B(v)$
 $\hookrightarrow$ rij $\times$ ing (top)

4.2. Lineaire afbeeldingen en matrices

4.2.1. Matrixrepresentatie van een lineaire afbeelding



$$\begin{aligned} (\mathbb{R}, V, +) &\rightarrow \beta_V = \{v_1, \dots, v_n\}, \text{ basis } (x_1, \dots, x_n) \\ (\mathbb{R}, W, +) &\rightarrow \beta_W = \{w_1, \dots, w_m\}, \text{ basis } (y_1, \dots, y_m) \\ v = \sum_{i=1}^n x_i v_i &\rightarrow L(v) = \sum_{i=1}^m y_i w_i \end{aligned}$$

$$= (v_1 \dots v_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (w_1 \dots w_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$L(v_i) = (w_1 \dots w_m) \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{im} \end{pmatrix} = \text{co}_W(L(v_i))$$

$$\Rightarrow (L(v_1) \dots L(v_n)) = (w_1 \dots w_m) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

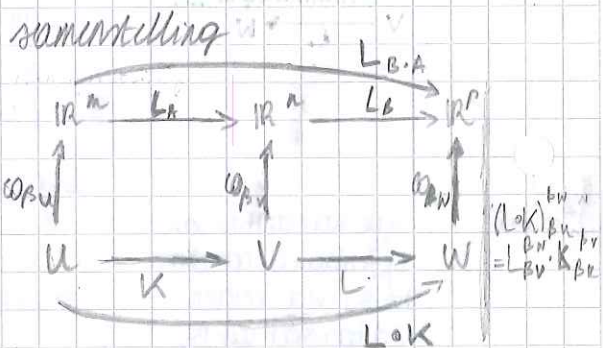
$$A = L_{\beta_W}^{\beta_V}$$

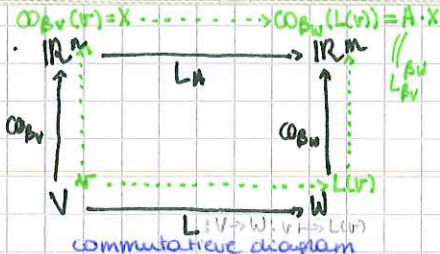
$$\Rightarrow L(v) = (L(v_1) \dots L(v_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (w_1 \dots w_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

in de kolommen van $L_{\beta_W}^{\beta_V}$ staan de coörd. tot β_W van beelden vld berekend met β_V

$$A = L_{pv}^{pv}$$

$$B = L_{pv}^{pv}$$





$$\omega_{B_W}(L(v)) = A \cdot x$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$Y = A \cdot X$$

$$\omega_{B_W}(L(v)) = L_{B_W}^{B_V}(\omega_{B_V}(v))$$

$$L(v) = (w_1 \dots w_m) \quad \omega_{B_W}(L(v)) = (w_1 \dots w_m) \quad \omega_{B_V}(v) = (x_1 \dots x_n)$$

- V vekt. ruimte van dim n met basis β en zeg L een lin. afbeelding van V naar W , dan is $L = \text{Id}_V \Leftrightarrow L_{\beta} = \text{Id}_n$

4.2.2. De vectorruimte van de lineaire afbeeldingen

propositie 4.11: Zeg $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ vectorruimten.

- Als K en L lin. afb. zijn van V naar W , dan is $K+L: V \rightarrow W$:
 $v \mapsto (K+L)(v) = K(v) + L(v)$ nog steeds een lin. afbeelding.
 Analog: $\forall \lambda \in \mathbb{R}: \lambda K: V \rightarrow W: v \mapsto (\lambda K)(v) = \lambda K(v)$ ook lineair.
- De verzameling van alle lin. afb. V naar W wordt met deze optelling en scal. vermen. een reële vectorruimte.

def. 4.12: Als $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ vectorruimten zijn, dan noemen we $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ voor de (lineaire) reële vectorruimte van alle lin. afb. van V naar W . Hom staat voor **homomorfisme** (bewaaren structuur).

$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ is een vekt. ruimte met als elementen lin. afb.

stelling 4.13: Zeg $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ eindigdim. vekt. ruimten van dimensie resp. n en m . Na het kiezen van een basis β_V in V en β_W in W , gaat de vekt. ruimte van lin. afb. van V naar W , $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$, in bijectief verband met de vekt. ruimte van de matrices $\mathbb{R}^{m \times n}$, via de lin. afb.: $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}: L \mapsto L_{\beta_W}^{\beta_V}$.
 Hierbij correspondeert enerzijds de opt. van lin. afb. met de optelling v. matrices, anderzijds het scal. vermen. bij lin. afb. met het scal. vermen. van matrices.

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow (K+L)_{\beta_W}^{\beta_V} &= K_{\beta_W}^{\beta_V} + L_{\beta_W}^{\beta_V} \quad \text{en} \quad (\lambda K)_{\beta_W}^{\beta_V} = \lambda K_{\beta_W}^{\beta_V} \\
 \text{want voor } A &= K_{\beta_W}^{\beta_V}, B = L_{\beta_W}^{\beta_V} \quad \text{en} \quad X = \omega_{\beta_V}(v) \quad Y = \omega_{\beta_W}(L(v)) \\
 \Rightarrow \omega_{\beta_W}((K+L)(v)) &= (A+B)X = AX + BX \\
 \omega_{\beta_W}((\lambda K)(v)) &= (\lambda A)X = \lambda AX
 \end{aligned}$$

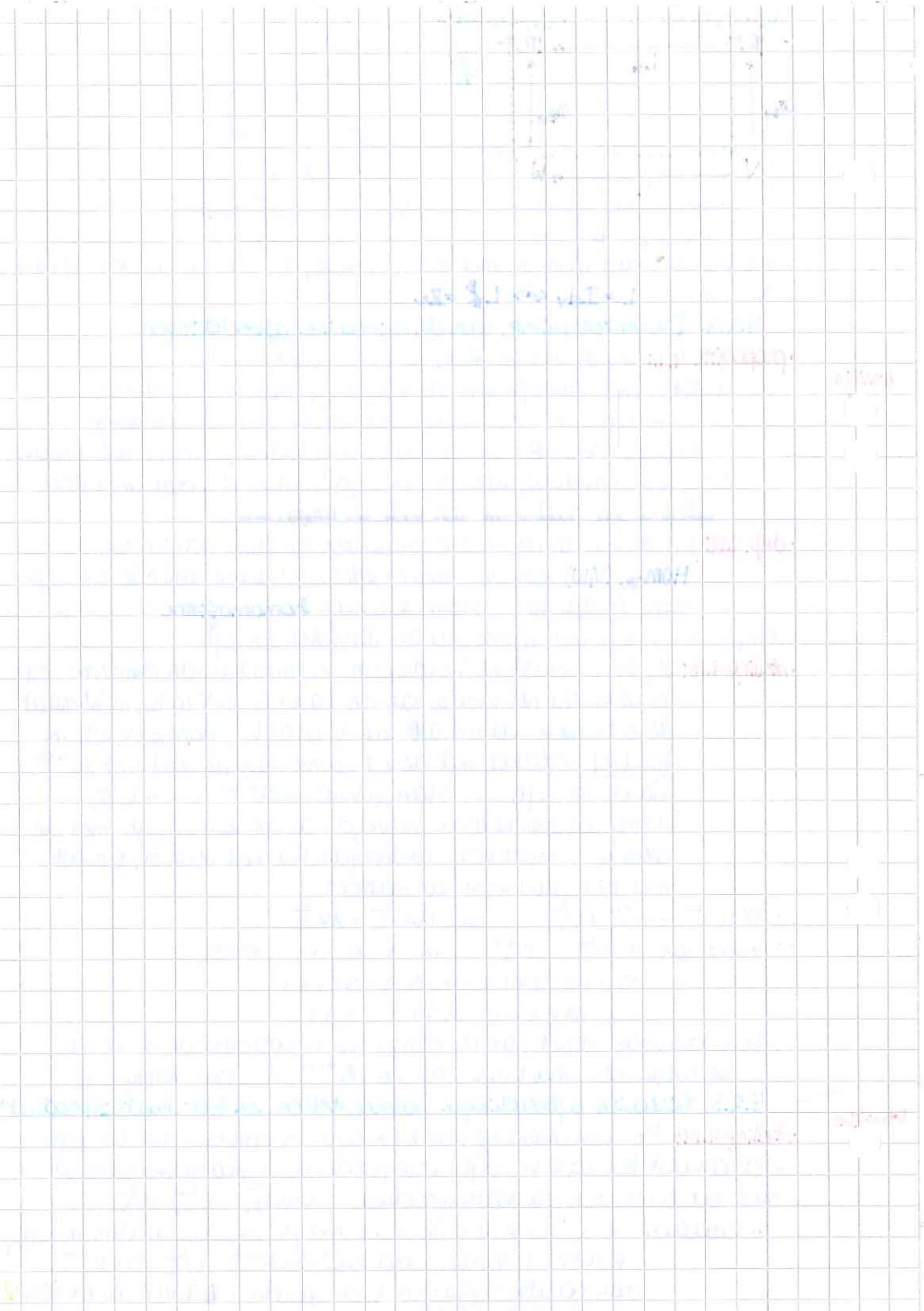
De vectorruimte-struct. van $(\mathbb{R}, \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W), +)$ correspondeert met de vectorruimte-structuur van $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m \times n}, +)$. (zie stelling 4.13)

4.2.3. Lineaire afbeeldingen samenstellen en het matrixproduct

stelling 4.14: De samenstelling van 2 lin. afb. is opnieuw een lin. afb.

Het samenstellen van lin. afb. correspondeert in matrixvoorstelling met het berekenen vlt. matrixproduct: $(L \circ K)_{\beta_W}^{\beta_V} = L_{\beta_W}^{\beta_U} \cdot K_{\beta_U}^{\beta_V}$

$\hookrightarrow$ reekensip. $(\mathbb{R}, U, +)$, $(\mathbb{R}, V, +)$, $(\mathbb{R}, W, +)$ met $\beta_U, \beta_V, \beta_W$ in dim: m, n, p resp.
 $K: U \rightarrow V, L: V \rightarrow W$ met $K_{\beta_V}^{\beta_U} = A \in \mathbb{R}^{n \times m}, L_{\beta_W}^{\beta_V} = B \in \mathbb{R}^{p \times n}$
 dan $\omega_{\beta_W}(L(K(u))) = B \cdot A \cdot x$ en $\omega_{\beta_W}(L \circ K(u)) = (B \cdot A) \cdot x$



- matrixverm. niet commutatief, want sommatellen niet commutatief
- afmetingen matrixverm. gescreend door tenn vectorruimte V .

4.3. Isomorfismen van vectorruimten

↳ isomorphe vectorruimten delen dezelfde eigenschappen

• herhaling:

$f: A \rightarrow B$ een **bijctie** $\Leftrightarrow f$ is injectief en surjectief

$$\Leftrightarrow \exists g: B \rightarrow A : g \circ f = \text{Id}_A \wedge f \circ g = \text{Id}_B$$

$$f(a)=0 \Rightarrow (a=0) \Leftrightarrow f: A \rightarrow B \text{ is injectief} \Leftrightarrow (\forall a, b \in \text{dom}(f) : f(a)=f(b) \Rightarrow a=b) \quad (\text{dom}(f) \text{ is } A)$$

$$a=b$$

↳ elke A_i juist 1 keer in B en geen andere A_j datzelfde beeld

$f: A \rightarrow B$ is **surjectief** $\Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a \in A : f(a)=b$

↳ elk element B_i moet minstens 1 A_i hebben

• def 4.16: Als $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ vectorruimten zijn, dan noemen we een afbeelding $L: V \rightarrow W$ een **isomorfisme** als L bijctief en lineair is. In dat geval zijn V en W **isomorf**, not. $V \cong W$.

• stelling 4.18: Stel dat $L: V \rightarrow W$ een bijctieve lineaire afbeelding is van de vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ naar de vectorruimte $(\mathbb{R}, W, +)$.

Dan is haar inverse afbeelding $K: W \rightarrow V$ ook een lin. afbeelding.

$\Rightarrow$ inverse afb. vte isomorfisme is opnieuw een isomorfisme

$\Rightarrow$ samenstelling van 2 isomorfismen ook isomorfisme

• opdracht 4.19: **oefening**. **surjectief en injectief**! **isomorfisme**

1. Zij $L: V \rightarrow W$ een surjectieve afbeelding en lineair. En zij $v_1, \dots, v_n$ een voortbrengend deel van V , dan wordt W voortgebracht door $f(v_1), \dots, f(v_n)$.

2. Zij $L: V \rightarrow W$ een injectieve lineaire afbeelding en zij $v_1, \dots, v_n$ vrg in V , dan is $f(v_1), \dots, f(v_n)$ vrg in W .

3. Zij $L: V \rightarrow W$ een isomorfisme en $v_1, \dots, v_n$ een basis van V , dan is $f(v_1), \dots, f(v_n)$ een basis van W . Een isomorfisme stuurt een basis steeds af op een basis.

• gevolg uit stelling 4.18: inverse bijct. lin. afb. = ook lin. $\Rightarrow$ het isomorfisme is symmetrisch

• stelling 4.20: Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ eindigdim. vect. ruimten, dan geldt:

$$1) V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$$

$$2) V \cong \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dim V = n.$$

• propositie 4.23: Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ eindigdim. vect. ruimten van $\dim = n$.

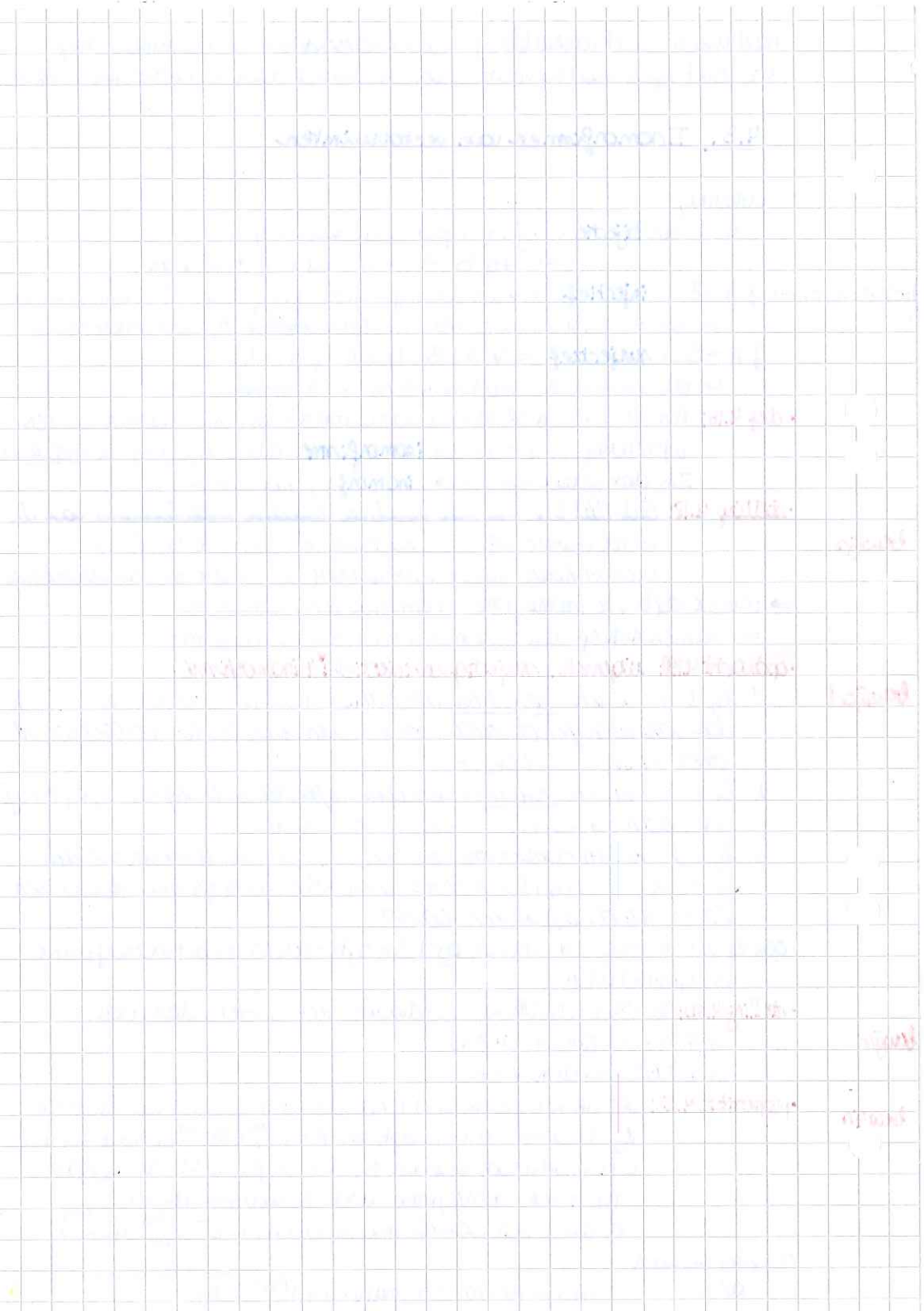
Zij $L: V \rightarrow W$ een lin. afb. en $A = L_{\beta_V}^{\beta_W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de matrix van L tov. gekozen basen β_V in V en β_W in W . Dan geldt:

1) L is een isomorfisme $\Leftrightarrow A$ inverteerbaar is.

$$2) \text{ als } L \text{ een isomorfisme is, dan is } (L^{-1})_{\beta_V}^{\beta_W} = (L_{\beta_V}^{\beta_W})^{-1}$$

↳ opmerkingen:

• voor V ($\dim(V)=n$) = $(\mathbb{R}, V, +)$ met basis β : matrix $(\text{cob})_{\beta}^{\beta} = \text{Id}_n$ standaardbasis



mer: want den lft de coörd van $(R, V, +)$ afbeeldt op de coörd v $\mathbb{R}^n$ in de standaardbasis, veranderen de coördienet

- voor elke $(R, V, +)$ is $\text{Id}: V \rightarrow V, v \mapsto v$ een isomorfisme voor V eindigdim.

1. matrix $\text{Id}_\beta^{\beta'}$ van Id tov 2 willek basissen is inverteerbaar

2. voor 2 dezelfde basissen: $\text{Id}_\beta^{\beta'} = I_n$ want elke basisveet zichzelf afbeeldt en is invert. dus transformatie ope invert.

de inverse afb transform. correspondeert dan met $I_n^{-1} = I_n$

• $\mathbb{R}^n \xrightarrow{L_A} \mathbb{R}^m$ met L isomorf,

$\uparrow \quad \uparrow$ dus $n=m$

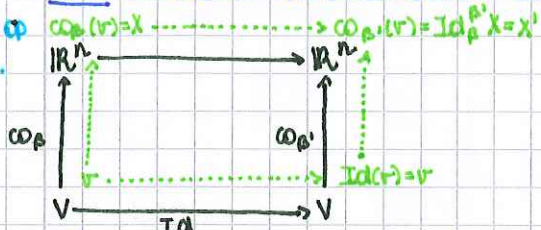
$V \xrightarrow{L} W \Rightarrow$ vierkante matrix corresp met L_A

$$\det(L_A) \neq 0$$

$\Rightarrow$ elke transformatie met $\det(A) \neq 0$ is isomorf.

4.4. Invloed vth veranderen van basis

4.4.1. Invloed op de coörd v. e. vector



om van $\omega_\beta(v)$ naar $\omega_{\beta'}(v)$

over te gaan gebruiken we de matrixvoorstelling vth Id transform.

$$\text{Id}_\beta^{\beta'}$$

$$\text{met } (\text{Id}_\beta^{\beta'})^{-1} = \text{Id}_\beta^{\beta'}$$

β in $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$: $\beta = \{1, x, x(x-1)\}$ en $\beta' = \{1, x, x^2\}$

dan $\text{Id}: \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ met

$$\text{Id}_\beta^{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{met } \text{Id}(1) = (1, 0, 0) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 = 1$$

$$\text{Id}(x) = (0, 1, 0) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 = x$$

$$\text{Id}(x(x-1)) = (0, -1, 1) = 0 \cdot 1 - 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 = x^2 - x$$

kolommen van $\text{Id}_\beta^{\beta'}$

neem $v \in \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ met $\omega_\beta(v) = (a, b, c)^T$

$$\text{dan } \omega_{\beta'}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b-c \\ c \end{pmatrix}$$

Algemeener:

$\text{Id}_\beta^{\beta'} = P$, de matrix van basisverandering van β naar β'

(d kolommen van P staan $\omega_{\beta'}(\beta)$ (de coörd v. vect in β tov basis β').

stel dat v afgeord in β : $\omega_\beta(v) = x$

$$\text{dan } \omega_{\beta'}(v) = x' = P \cdot x \quad \text{of} \quad \omega_{\beta'}(v) = \text{Id}_\beta^{\beta'} \cdot \omega_\beta(v)$$

4.2.2. Invloed op de matrix vth lineaire afbeelding

de volgende pagina

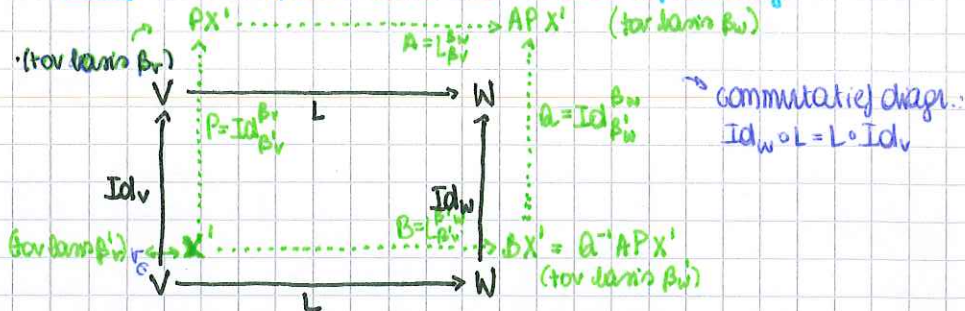
UNIT 1: THE HISTORY OF THE UNITED STATES



UNIT 2: THE AMERICAN WEST

The American West was a region of the United States that was characterized by its vast, open spaces and its rich natural resources. It was a region that was often the site of conflict between different groups of people, and it was a region that played a major role in the development of the United States.

4.4.2. Invloed op de matrix vlie lineaire afbeelding



Stelt een lin. afb. $L: V \rightarrow W$

met V, W eindigdim en elk gekozen basissen β_v, β_v' en β_w, β_w'

in $A = L_{\beta_w}^{\beta_v}$ en $B = L_{\beta_w'}^{\beta_v'}$

veranderen A en B :

$$B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$$

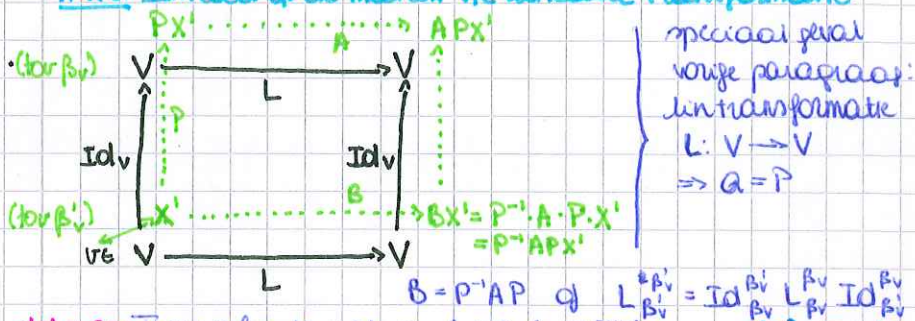
of anders

$$L_{\beta_w'}^{\beta_v'} = \text{Id}_{\beta_w'}^{\beta_w} \cdot L_{\beta_w}^{\beta_v} \cdot \text{Id}_{\beta_v}^{\beta_v'}$$

$$A = L_{\beta_w}^{\beta_v}$$

$$B = L_{\beta_w'}^{\beta_v'} = \text{Id}_{\beta_w'}^{\beta_w} \cdot L_{\beta_w}^{\beta_v} \cdot \text{Id}_{\beta_v}^{\beta_v'}$$

4.4.3. Invloed op de matrix vlie lineaire transformatie



speciaal geval
vorige paragraaf:
lin. transformatie
 $L: V \rightarrow V$
 $\Rightarrow A = P$

$$B = P^{-1}AP \text{ of } L_{\beta_v'}^{\beta_v'} = \text{Id}_{\beta_v'}^{\beta_v} L_{\beta_v}^{\beta_v} \text{Id}_{\beta_v}^{\beta_v'}$$

def. 4.26: Twee vierkante matrices A en $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zijn **gelijvormig** als er een invert. matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bestaat, zo dat $B = P^{-1}AP$.

$\Rightarrow$ **gevolg 4.27**: De matrix vlie lin. transform. van een (eindigdim) vekt. ruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ is door een verandering van basis van V overzet in een gelijkvormige matrix.

4.5. De dimensiestelling van lineaire afbeeldingen

def. 4.31: Zij $L: (\mathbb{R}, V, +) \rightarrow (\mathbb{R}, W, +)$ een lin. afb. De **kernel** van L , not. $\ker(L)$, is de deelruimte $\ker(L) = \{v \in V \mid L(v) = 0\}$.

Het **beeld** van L , not. $\text{Im}(L)$ of $L(V)$, is de deelruimte

$$\text{Im}(L) = \{w \in W \mid \text{er bestaat een } v \in V \text{ waarvoor } L(v) = w\}.$$

De **dimensie** van $\text{Im}(L)$ noemen we de **rang** van L .

propositie 4.32: Met de notatie van vorige definitie is de kern van L een deelvectorruimte van V en het beeld een deelvectorruimte van W . In het bijzonder is $\text{Im}(L)$ de vekt. ruimte voortgebracht door de beelden van een basis van V .

1. The first step is to identify the problem.

2. The second step is to define the problem.

3. The third step is to generate hypotheses.

4. The fourth step is to test the hypotheses.

5. The fifth step is to evaluate the results.

6. The sixth step is to draw conclusions.

7. The seventh step is to communicate the results.

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

8. The eighth step is to implement the solution.

9. The ninth step is to monitor the progress.

10. The tenth step is to evaluate the outcome.

11. The eleventh step is to document the process.

12. The twelfth step is to review the results.

13. The thirteenth step is to share the findings.

14. The fourteenth step is to reflect on the experience.

15. The fifteenth step is to learn from the experience.

16. The sixteenth step is to apply the lessons learned.

17. The seventeenth step is to continue to improve.

18. The eighteenth step is to stay motivated.

19. The nineteenth step is to stay focused.

20. The twentieth step is to achieve success.

bewijs

• stelling 4.34: Zij $L: V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding. Dan geldt dat L injectief is ana $\ker(L) = \{0\}$

• opmerking 4.35: Voor $L: V \rightarrow W$ een lin afb tussen eindigdim vektorruimten kiest L , na keuze van basis α voor V , basis β voor W , een matrixvoorstelling $A = L_{\beta}^{\alpha}$

$\rightarrow \ker L \sim$ nulruimte $N(A) : \text{co}_{\alpha}(\ker L) = N(L_{\alpha}^{\beta})$

$\rightarrow \text{Im}(L) = \text{set } \{L(e_1), \dots, L(e_n)\}$ met $e_1, \dots, e_n \in \alpha$

$\text{Im}(L) \sim$ kolomruimte $C(A) : \text{co}_{\beta}(\text{Im} L) = C(L_{\alpha}^{\beta})$

• stelling 4.36: **Dimensiestelling voor lineaire afbeeldingen**

Als $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ vektorruimten zijn, waarvan V eindigdimensionaal is, en als $L: V \rightarrow W$ een lin afb is, dan geldt dat:

$$\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}}(\ker L) + \dim_{\mathbb{R}}(\text{Im} L)$$

alternatief: $\dim$ van $V = \dim_{\mathbb{R}}(\ker L) + \text{rang van } L$

$\dim_{\mathbb{R}}(\ker L)$ noemt men dus ook wel eens de **corang** van L

• stelling 4.39: Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ eindigdim vektorruimten en $L: V \rightarrow W$ een lin afb. Dan bestaat er een basis in V en een basis in W zodanig dat de matrix van L tot deze basen is gegeven door een matrix van de vorm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{\pi} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = L_{\beta}^{\alpha}$$

Hierin is π de rang van L .

↳ basen kiezen zodat ze deze vorm krijgen:

$L: V \rightarrow W$ en $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ gekozen basis V , $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ voor W

• ~~ook~~ $\mathbb{I}$ met $L(\alpha_i) = \beta_i$ als $1 \leq i \leq \pi$ en $L(\alpha_i) = 0$ als $\pi+1 \leq i \leq n$

dus $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{\pi}, \underbrace{\alpha_{\pi+1}, \dots, \alpha_n}_{\in \ker(L)}\}$ en $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_{\pi}, \underbrace{\beta_{\pi+1}, \dots, \beta_m}_{L(\alpha_i) \neq 0 \text{ aanvullen tot basis}}\}$

⇒ gevolg 4.40: Als $L: V \rightarrow V: v \mapsto L(v)$ een lineaire transformatie is van de eindigdim. vektorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$, dan geldt:

L is injectief $\Leftrightarrow L$ is surjectief $\Leftrightarrow L$ is bijectief.

↔ bijectief + lin = isomorfisme

4.6. Rang en eigenschappen

• Voor $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hebben we lin afb $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m: X \mapsto A \cdot X$

⇒ dim stelling 4.36 kolommen in A $\dim(\text{Im}) = \dim(\ker(A)) + \dim(\text{Im}(A))$

winten al $n = \dim(N(A)) + 1 \dim(R(A))$

⇒ $\text{rang} = \text{kolomrang} = \text{rang } L_A \rightarrow \text{rang vle matrix}$

we herformuleren $C(AB) = C(A)$ en $R(AB) = R(A)$ tot:

⇒ gevolg 4.44: Veronderstel dat A, B matrices zijn, zo dat $A \cdot B$ bepaald is, dan geldt: $\text{rang } AB \leq \min(\text{rang } A, \text{rang van } B)$

1. The first part of the paper is devoted to a general discussion of the problem. It is shown that the problem is of great importance for the theory of the structure of the atom. The second part is devoted to a detailed analysis of the experimental results. It is shown that the results are in good agreement with the theoretical predictions. The third part is devoted to a discussion of the results and their implications for the theory of the structure of the atom.

2. The second part of the paper is devoted to a detailed analysis of the experimental results. It is shown that the results are in good agreement with the theoretical predictions. The third part is devoted to a discussion of the results and their implications for the theory of the structure of the atom.

3. The third part of the paper is devoted to a discussion of the results and their implications for the theory of the structure of the atom. It is shown that the results are in good agreement with the theoretical predictions. The fourth part is devoted to a discussion of the results and their implications for the theory of the structure of the atom.

4. The fourth part of the paper is devoted to a discussion of the results and their implications for the theory of the structure of the atom. It is shown that the results are in good agreement with the theoretical predictions. The fifth part is devoted to a discussion of the results and their implications for the theory of the structure of the atom.

5. The fifth part of the paper is devoted to a discussion of the results and their implications for the theory of the structure of the atom. It is shown that the results are in good agreement with the theoretical predictions. The sixth part is devoted to a discussion of the results and their implications for the theory of the structure of the atom.

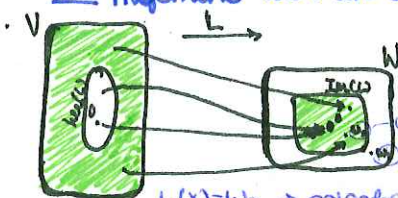
6. The sixth part of the paper is devoted to a discussion of the results and their implications for the theory of the structure of the atom. It is shown that the results are in good agreement with the theoretical predictions. The seventh part is devoted to a discussion of the results and their implications for the theory of the structure of the atom.

• **stelling 4.45:** Zij $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dan zijn volgende beweringen equivalent:
 a) $\forall b \in \mathbb{R}^m$ heeft het stelsel $AX=b$ oplossing
 b) $C(A) = \mathbb{R}^m$
 c) rang van $A = m$
 d) rijen van A zijn L.O.

• **stelling 4.46:** Zij $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dan zijn volgende beweringen equivalent:
 a) $\forall b \in \mathbb{R}^m$ heeft het stelsel $AX=b$ hoogstens één oplossing
 b) $N(A) = \{0\}$
 c) rang van $A = n$
 d) kolommen van A zijn L.O.

• **stelling 4.47:** Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dan zijn volgende beweringen equivalent:
 a) A is inverteerbaar
 b) $\det(A) \neq 0$
 c) rang van $A = n$
 d) rijen van A zijn L.O.
 e) kolommen van A zijn L.O.

4.7. Algemene vorm en oplossing van een lineair probleem



een (algemeen) lineair probleem:

$L: V \rightarrow W$ met $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$
 we hebben $w_0 \in W$ en L lin. afh.
 en zoeken nu $x \in V: L(x) = w_0$

$L(x) = w_0 \rightarrow$ oplosbaar
 $L(x) = w_1 \rightarrow$ niet oplosbaar

• **stelling 4.48: Oplosbaarheid van een lineair probleem**

gegeven in de lineaire afh: $L: (\mathbb{R}, V, +) \rightarrow (\mathbb{R}, W, +)$ die het lineair probleem $L(x) = w_0$ bepaalt. Dit lin. probleem heeft een oplossing a.n.v. $w_0 \in \text{Im}(L)$ (oplosbaarheidswaarde). Veronderstel dat het probleem oplosbaar is en dat x_p een opl. is voor $L(x) = w_0$. Dan wordt de (vrijkeuze) oplosz. gegeven door: $x_p + \ker(L) = \{x_p + x_h \mid x_h \in \ker(L)\}$. De dimensie van $\ker(L)$ is het aantal vrijheidsgraden v.h. lin. probl. genoemd, en x_p een **particuliere oplossing** van het probleem. In het bijzonder is het homogeen probleem ($w_0 = 0$) steeds oplosbaar en vormt de opl. verz. hiervoor de deelruimte $\ker(L)$.

• opmerkingen:

1. L surjectief $\rightarrow$ probleem steeds oplosbaar
2. # vrijheidsgraden = # basisvech. $\ker(L)$

H5 - Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonaliseerbaarheid

5.1. Probleemstellingen: voorbeelden

5.2. Eigenwaarden en eigenvectoren

• diagonaalmatrix handig bij machten:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \rightarrow \Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

• stel $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: X \mapsto L_A(X) = A \cdot X$ (lin. transfor.)

A omvormen tot getijlvormige diagonaalmatrix:

$$\exists P \text{ invst: } P^{-1} A \cdot P = \Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow A \cdot P = P \cdot \Lambda = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

• stel P achty kolommen, $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$

$$\Rightarrow AP = (Ap_1 \dots Ap_n) = A(p_1 \dots p_n) = (p_1 \dots p_n) \cdot \Lambda = (\lambda_1 p_1 \dots \lambda_n p_n)$$

→ elke kolom p_i van P voldoet aan: $Ap_i = \lambda_i p_i$

→ in opt. van $(A - \lambda_i I_n) X = 0$

met P invst. dan $(A - \lambda_i I_n) X = 0$ een niet-nul opt.

↳ afgeleid uit kolommen

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda_i I_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_i \text{ nulpunt van } \text{vgl. } \det(A - X I_n) = 0$$

↳ verkleinigt u p_i n

• def. 5.1: Veronderstel dat $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Een niet-nulvector $v \in \mathbb{R}^n$

noemen we de eigenvector van A als u een $\lambda \in \mathbb{R}$ bestaat, zo dat $A \cdot v = \lambda \cdot v$ (waarbij v wordt beschouwd als een kolomvector).

Deze waarde λ noemen we de eigenwaarde horende bij eigenvector v . De veelterm $\chi_A(x) = \det(x I_n - A) = \det(A - x I_n)$

noemen we de karakteristieke veelterm van matrix A.

⇒ stelling 5.2: Gegeven is een vierkante matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Een getal $\lambda \in \mathbb{R}$ is een eigenwaarde van A ook λ een nulpunt is van de karakteristieke veelterm van A.

• def. 5.3: Veronderstel dat $L: V \rightarrow V$ een lineaire transformatie is in de vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$. Een niet-nulvector $v \in V$ noemen we een eigenvector van L als er een $\lambda \in \mathbb{R}$ bestaat, zo dat $L(v) = \lambda \cdot v$. Deze coëfficiënt λ noemen we de eigenwaarde horende bij eigenvector v van L.

• opm. wijzigt nu def. ~~voor~~ NOOIT de nulvector (is een opt. maar geen eigen-eigenwaarde van wel 0 zijn).

• def. 5.4: Een vierkante matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is diagonaliseerbaar ~~als A een basis heeft die uit~~ als A getijlvormig is met een diagonaalmatrix

Een lineaire transformatie $L: (\mathbb{R}, V, +) \rightarrow (\mathbb{R}, V, +)$ noemen we diagonaliseerbaar als V een basis heeft die volledig uit eigenvectoren van L bestaat.

↳ $L(v) = \lambda v$ $\rightarrow$ λ is eigenwaarde v is eigenvector $\rightarrow$ stelling 5.2

bewijs

• stelling 5.8: Een vierkante matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is diagonaalbaar $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^n$ kan worden opgesplitst in een rechte hoek van n lijnen die volledig uit eigenvectoren v. A bestaat.

bewijs

• stelling 5.9: Gelijkvormige matrices hebben dezelfde karakteristieke veelterm, hetzelfde spoor en dezelfde determinant.

→ stelling 5.8 + def 5.7 anders te beelden: $\begin{matrix} \text{matrix } A & \xrightarrow{\text{standaardbasis } \beta} & \text{matrix } \Lambda_{\text{diagon.}} \\ (L_A)_{\beta}^{\beta} = A & & (L_{\Lambda})_{\beta}^{\beta} = \Lambda \end{matrix}$ β basis v. eigenvect. A

andere mat. standaardbasis gelijkvormig nieuwematrix tot nieuwe basis

⇒ gevolg 5.10: De karakteristieke veelterm, de det. en het spoor v.d. matrix v. lineaire transformatie v. eindigdim vektorruimte zijn onafhankelijk van de gekozen basis. H.a.w. alle matrix-voorstellingen van dezelfde lin. transf. hebben dezelfde det., karakteristieke veelterm & spoor.

Zij $L: V \rightarrow V$ een lin. transf. v.d. eindigdim v.ektorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$. Dan noemen we de karakteristieke veelterm v.d. matrixvoorstelling L_{α}^{α} , van een d.w. basis α van V , de karakteristieke veelterm van L , not. φ_L . Zo kunnen we ook spreken van de determinant van L en het spoor van L , not. $\det(L)$ en $\text{tr}(L)$.

• notitie uit les: $\varphi_A(x) = \text{veelterm van graad } n \text{ in } x$ (det($xI_n - A$))
eigenwaarden = nulpunten veelterm $\rightarrow \varphi_A(\lambda) = 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

v.l. stel $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \varphi_A(x): 2^{\circ}$ polynoom

- 1) $\varphi_A(x)$ 2 versch. $\lambda_1, \lambda_2 \Rightarrow A$ diagon.
- 2) $\varphi_A(x)$ geen reël $\lambda \Rightarrow$ geen eigenveect
- 3) $\varphi_A(x)$ dubbel nulpunt $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow$ 1 eigenveect bij $\lambda_1 = \lambda_2$
want: onafh. eigenveect $\rightarrow$ diagon. (anders niet)

5.3. Spectrum en eigenvuimte

• def. 5.12: Zij $L: V \rightarrow V$ een lin. transf. van de v.ektorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$. Het spectrum van L is de verzameling van eigenwaarden van L en is dus een deelverzameling van $\mathbb{R}$. Not. $\text{Spec}(L)$.

• def. 5.13: De algebraïsche multipliciteit van een eigenwaarde λ van een lineaire transformatie L van een eindigdim. vektorruimte is de multipliciteit van λ als nulpunt v.d. karakteristieke veelterm $\varphi_L(x)$. Notatie: $m(\lambda)$.

→ opm: na voll. ontbinding in eerstegraadsfactoren van $\varphi_L(x)$ is de macht m van $(x - \lambda)^m$ de (algebr.) multipliciteit v. λ

• def 5.14: Zij $L: V \rightarrow V$ een lin. transf. en zij $\lambda \in \text{Spec}(L)$. Dan is de verzameling $\{v \in V \mid L(v) = \lambda v\}$ een deelruimte van V , die we de eigenvuimte van de eigenwaarde λ noemen. Notatie: E_{λ} .

Als E_{λ} eindigdimensionaal is, noemen we de $\dim_{\mathbb{R}} E_{\lambda}$ de meetkundige multipliciteit van λ . Not. $d(\lambda)$

hoogste
graad veelterm

• opmerkingen:

- E_λ is een deelruimte van V (criterium nagaan of voldoende invariant):
 $E_\lambda = \{v \in V \mid (L - \lambda Id)(v) = 0\} = \ker(L - \lambda Id)$
- nulvector $\in E_\lambda$, want $\in$ van elke deelruimte, maar zelf nooit een eigenvecht
- voor $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is het spectrum + multipliciteiten analoog als voor de lin. transf. gedef.

de eigenruimte als volgt: $E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot v = \lambda v\} = N(A - \lambda Id_n)$

stelling 5.16: Veronderstel dat $L: V \rightarrow V$ een lin. transf. is vld eindig-dim. vektorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$, met $\text{Spec}(L) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Dan geldt:

$$1. m(\lambda_i) \geq 1$$

$$2. d(\lambda_i) \geq 1$$

$$3. d(\lambda_i) \leq m(\lambda_i)$$

$$V \lambda_i$$

5.4. Diagonaliseerbaar.

via lin. transformatie

stelling 5.18: Veronderstel dat $L: V \rightarrow V$ een lineaire transf. is vld eindig-dim vektorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$, en veronderstel dat $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ onderling versch. eigenwaarden zijn van L , telkens met bijbehorende eigenvecht $v_1, \dots, v_k$. Dan is de verzameling eigenvecht $\{v_1, \dots, v_k\}$ lineair onafhankelijk.

def 5.19: Het spectrum van een lineaire transformatie $L: V \rightarrow V$ van een vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ van dimensie n heet **enkelvoudig** als $\#\text{Spec}(L) = n$.

(L heeft precies n versch. eigenwaarden, elk met algebra. mult. gelijk aan 1)

prop 5.20: Een lineaire transformatie met een enkelvoudig spectrum is diagonaliseerbaar.

Omgekeerde is NIET geldig! diagon. $\nrightarrow$ enkelvoudig spectrum

en $m(\lambda_i) = 1 \Rightarrow d(\lambda_i) = 1 \Rightarrow \dim E_{\lambda_i} = 1$ voor enkelvoudig spectrum

lemma 5.22: Indien een lin. transf. L van een eindig-dim vektorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ diagonaliseerbaar is, dan moet de karakteristieke veelterm van L volledig ontbinden als product v. lgr. factoren.

stelling 5.23: Zeg $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte van dimensie n en zij L een lin. transf. van V , waarvan p_L voll. ontbindt (over $\mathbb{R}$) als product van r graadfactoren. Stel dat $\text{Spec}(L) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Dan is L diagonaliseerbaar a.w. voor elke eigenwaarde λ_i geldt dat $d(\lambda_i) = m(\lambda_i)$.

$\Rightarrow$ nodige en voldoende voorwaarde voor diagonaliseerbaarheid:

1. p_L moet helemaal ontbinden in r graadfactoren

2. $m(\lambda_i) = d(\lambda_i)$, voor alle λ_i

gm. Als L uit stelling 5.23 diagon. is, dan is $V = \sum_{i=1}^k E_{\lambda_i} = \oplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}$, en in de (ordijnde) wijze van combineren van E_{λ_i} een basis van V .

• **propositie 5.25:** Zij L een lineaire transf. van een eindigdim. vektorruimte $(R, V, +)$, waarvan de karakteristieke veelterm volledig ontbindt (over R) als prod. van n graadfactoren. Dan zijn determinant en spoor van L gelijk aan resp. het product en de som van alle eigenwaarden van L , waarbij elke eigenwaarde geteld w met haar algebraïsche multipliciteit.

5.5 Transformaties van complexe vectorruimten

• **stelling 5.27: Hoofdstelling van de algebra**

Elke veelterm in $\mathbb{C}[X]$ kan volledig ontbonden worden als product van eerste graadfactoren. I.d.w. als $p(X) \in \mathbb{C}[X]$ een veelterm van graad n is, dan bestaan er elementen $c \in \mathbb{C}$, $x_i \in \mathbb{C}$ en $m_i \in \mathbb{N}$ zo dat $p(X) = c(X - x_1)^{m_1}(X - x_2)^{m_2} \dots (X - x_k)^{m_k}$ met $n = m_1 + \dots + m_k$.

• Zij $(\mathbb{C}, V, +)$ een complexe vectorruimte en $L: V \rightarrow V$ een lin. transformatie. Aan is **-eigenw.** van L een niet-nulvekt $v \in V$ als er een $\lambda \in \mathbb{C}$ bestaat zo dat $L(v) = \lambda v$

- **eigenwaarde λ horende bij eigvekt v**

- $\chi_A(X) = \det(XI_n - A) = \text{ karakteristieke veelterm } A = L_\alpha^d$ met α willekeurig

• **def. 5.28:** Een vierkante matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ is **diagonaliseerbaar (oer)**

als A gelijkvormig is (over $\mathbb{C}$) met een diagonaal matrix

m.a.w. als $\exists P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invert. $P^{-1}AP = \Lambda$ met $\Lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonaal matrix.

Een lin. transf. $L: (V, +) \rightarrow (V, +)$ is **diagonaliseerbaar** als V een basis heeft die voll. bestaat uit eigvekt van L .

• **stelling 5.30:** Zij $(\mathbb{C}, V, +)$ een vectorruimte van dim n en L een lin. transf. van V . Stel dat $\text{Spec}(L) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Dan is L diagon. oer van elke eigenwaarde λ_i geldt dat $m(\lambda_i) = d(\lambda_i)$.

• **propositie 5.31:** Zij L een lin. transf. v.e. eindigdim. vektorruimte $(\mathbb{C}, V, +)$. Dan zijn de det. en het spoor van L gelijk aan resp. het product en de som van alle eigenwaarden van L , waarbij elke eigenwaarde geteld w met haar algebraïsche multipliciteit.

• **eigensch 5.32:** Zij A een reële $(n \times n)$ -matrix, dan geldt:

→ A is diagonaliseerbaar oer $\mathbb{R}$

⇔ $\mathbb{R}^n$ heeft een basis van (reële) eigvekt van A

⇔ $\exists P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invert. : $P^{-1}AP = \text{reële diagonaal matrix}$ $\xrightarrow{\text{Spec}(A)}$

⇔ χ_A ontbindt voll. als prod. van n g.f. factoren over $\mathbb{R}$ en $\forall \lambda_i \in \mathbb{R} : d(\lambda_i) = \dim_{\mathbb{R}} E_{\lambda_i} = m(\lambda_i)$

→ A is diagonaliseerbaar over $\mathbb{C}$

⇔ $\mathbb{C}^n$ heeft een basis van (complexe) eigvekt van A

⇔ $\exists P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invert. : $P^{-1}AP = \text{complexe diagonaal matrix}$

⇔ $\forall \lambda_i \in \mathbb{C} : \dim_{\mathbb{C}} E_{\lambda_i} = d(\lambda_i) = m(\lambda_i)$

$\lambda_i \in \text{Spec}(A)$

4.6 - Inproductruimte en Euclidische ruimte

4.1. Inproducten en Hermietische producten

def. 6.1: Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een reële vektorruimte. Een **inproduct** (of **inwendig product**) op V is een afbeelding

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}: (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

die voldoet aan volgende eigenschappen:

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is **lineair in de eerste component**, d.w.z. dat

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle = \lambda_1 \langle v_1, w \rangle + \lambda_2 \langle v_2, w \rangle \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall v_1, v_2, w \in V$$

2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is **symmetrisch**, d.w.z. dat $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \quad \forall v, w \in V$

3. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is **positief**, d.w.z. dat $\langle v, v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in V$

4. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is **definitief**, d.w.z. dat $\forall v \in V: \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0 \quad (0 \in V)$

Voortaan spreken we van een **inproductruimte** $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ als een reële vektorruimte voorzien van een inproduct. Het inproduct is ook wel het **reëlaar product** genoemd.

opmerkingen:

1. Uit de lineariteit i/h 1^o comp. en de symmetrie volgt ook de lineariteit i/h 2^o component

$$\langle v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \rangle = \langle \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2, v \rangle \stackrel{\text{symm.}}{=} \langle \lambda_1 w_1, v \rangle + \langle \lambda_2 w_2, v \rangle \stackrel{\text{lin. 1^o comp}}{=} \lambda_1 \langle w_1, v \rangle + \lambda_2 \langle w_2, v \rangle \stackrel{\text{symm.}}{=} \lambda_1 \langle v, w_1 \rangle + \lambda_2 \langle v, w_2 \rangle$$

2. Uit de lin. van beide comp. volgt ook: $\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0 \quad (0 \in \mathbb{R}), \quad \forall v \in V$

3. line. in 1^o comp. is equiv. met $\forall v, w \in V$ is $\langle \cdot, w \rangle: V \rightarrow \mathbb{R}: v \mapsto \langle v, w \rangle$ een lin. afbeelding

def. 6.3: Zij $(\mathbb{C}, V, +)$ een comp. vektorruimte. Een **Hermietisch product** op V is een afb.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}: (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

die voldoet aan volgende eigenschappen:

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is **lineair i/h 2^o comp.**, d.w.z. dat $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \forall v_1, v_2 \in V, \forall w \in V$

$$\langle w, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_1 \langle w, v_1 \rangle + \lambda_2 \langle w, v_2 \rangle$$

2. $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle} \quad \forall v, w \in V$

3. $\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$ (positief)

4. $\forall v \in V: \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0 \quad (0 \in V)$ (definitief)

De Hermietische ruimte $(\mathbb{C}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ is een comp. vektorruimte voorzien van een Hermietisch product

Opmerking:

1. Het Hermietisch prod. is NIET symmetrisch (algemeen) $\Rightarrow$ geen lin. i/h 1^o comp.

Wel geldt $\forall v_1, v_2, w \in V; \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$:

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle = \overline{\langle \lambda_1 v_1, w \rangle} + \overline{\langle \lambda_2 v_2, w \rangle} = \overline{\langle w, \lambda_1 v_1 \rangle} + \overline{\langle w, \lambda_2 v_2 \rangle}$$

dit is de **toegevoegde lineariteit** i/h 1^o component

2. Zowel het Hermietisch prod. als het inprod. geven voor $v \in V$:

$$\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ inproduct: logisch, alle uitkomsten $\in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Herm. prod.: $\langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle} \Rightarrow \langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Logisch dat ze allebei positief zijn.

$$\overline{a+bi} = a-bi$$

- enkele voorbeelden:

1. standaard inproduct op $\mathbb{R}^n$:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: (x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^T \cdot y$$

2. standaard Hermitisch prod. op $(\mathbb{C}^n, +)$:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}: (x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}) \mapsto \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i = \overline{x}^T \cdot y = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$$

3. inprod. op vektorruimten van continue functies (o.a. veeltermen) op

$$\text{interval } [a, b] \subset \mathbb{R}: \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$$

4. inproduct op $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m \times n}, +)$:

$$\langle A, B \rangle: \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}: (A, B) \mapsto \text{Tr}(A \cdot B^T) = \sum_{i=1}^m (AB^T)_{ii}$$

5. inprod. in vlak in 3D met rechth. orthonormaal T: $\sum_{i,j=1}^m a_{ij} b_{jl} = \sum_{j=1}^m (AB^T)_{lj} = \text{Tr}(A^T B)$

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \alpha \quad \text{met } \alpha \text{ lengte vdw. vect. en } \alpha \in [0, \pi] \text{ hoek t/m vectoren}$$

6.2. Euclidische meetkunde en Euclidische ruimte

def. 6.9: Zij $(V, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte. Dan definiëren we, voor elke vector $v \in V$ de lengte van of norm van v , not. $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Wanneer voor een vector v geldt dat $\|v\| = 1$, dan noemen we v genormeerd of een eenheidsvector. Deze begrippen kan men uitzetten, op ident. wijze invullen in een Hermitische ruimte $(\mathbb{C}, V, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Om terug te komen op de voorbeelden van hierboven:

$$1. \text{ voor } (\mathbb{R}, \mathbb{R}, +): \|x\| = \sqrt{x^2} = |x| \quad (\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +): \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +): \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$2. \text{ voor } (\mathbb{C}, \mathbb{C}, +): \|v\| = \sqrt{v^T \cdot v}$$

$$3. \text{ voor } (\mathbb{R}, \mathbb{R}[\Sigma], +): \|p(x)\| = \sqrt{\int_a^b p(x)^2 dx}$$

$$4. \text{ voor } (\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m \times n}, +): \|A\| = \sqrt{\text{Tr}(A \cdot A^T)} = \sqrt{\text{Tr}(A^T A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (A)_{ij}^2}$$

↳ **Frobeniusnorm** $\|A\|_F$

stelling 6.11: Zij $(V, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte met bijbehorende norm:

$$\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}: v \mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

$$\text{Dan geldt: } 1. \forall \lambda \in \mathbb{R}: \forall v \in V: \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$$

$$2. \forall v \in V: \|v\| > 0 \text{ en } (\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0)$$

• opm: v normeren doen we zo: $v \mapsto \frac{v}{\|v\|} \quad \forall v \in V, v \neq 0$

def. 6.13: Zij $(V, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte (of $(\mathbb{C}, V, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Herm.). Voor willek. vectoren $v, w \in V$ definiëren we

$$d(v, w) = \|v - w\| \text{ als de afstand tussen } v \text{ en } w.$$

stelling 6.14: Zij $(V, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte

$$1. \forall v, w \in V: |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Dit is de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz.

2. Deze ongelijkheid is een gelijkheid als de vectoren v, w lineair afhankelijk zijn.

$$\text{m.a.w. } |\langle v, w \rangle| = \|v\| \cdot \|w\| \Leftrightarrow v, w \perp A.$$

• opm: $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ geldt ook i.d. Herm. ruimte (analoog bewijs)
hier is $|\langle v, w \rangle|$ echter weer de modulus

• def 6.16: Zg $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte en zij $v \neq 0$ en $w \neq 0$, $v, w \in V$.
De **hoek tussen** v en w is de unieke hoek $\theta \in [0, \pi]$ waaraan
$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Willekeurige vectoren $v, w \in V$ zijn **orthogonaal** of **loodrecht** op elkaar als $\langle v, w \rangle = 0$, not. $v \perp w$.

Als $v \neq 0$ en $w \neq 0$ geldt dus dat $v \perp w$ precies wanneer $\theta = \frac{\pi}{2}$.

• bedenkingen + opmerkingen:

- $\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \theta$ = lengte v · lengte w · projectie w op v
- $\theta \in [0, \pi]$ want daar Cauchy-Schwarz: $-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$
- Ook i.e. Herm. ruimte $(\mathbb{C}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ zijn $v, w \in V$ orthogon. als $\langle v, w \rangle = 0$

• stelling 6.19: Zg $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte met bijhorende norm $\|\cdot\|$.
Dan geldt $\forall v, w \in V$ dat

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad (\text{Driehoeksongelijkheid})$$

• andere formulering: $\|v - w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (analoog te bewijzen)
ook geldig voor Herm. ruimte (analoog bewijs)

• def 6.21: Een eindigdim inproductruimte noemen we een **Euclidische ruimte**. Een eindigdim Herm. ruimte noemen we een **unitaire ruimte**.

→ $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ n -dim. Euclidische ruimte met standaard inproduct
 $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ n -dim unitaire ruimte met standaard Herm. prod.

• opm: In willek. inprodruimte geldt voor vect $v \neq 0$ en $w \neq 0$:

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \theta, \quad \theta \text{ hoek tussen } v \text{ en } w \\ \Rightarrow \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + 2\langle v, w \rangle \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

$$\text{als } \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \quad (\text{stelling van Pythagoras})$$

6.3. Orthonomale basis, orthogonaal complement

• stelling 6.23: Zg $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inprod ruimte en zij $\alpha = \{v_1, \dots, v_k\}$ een deelverzameling van V bestaande uit onderling $\perp$ aan $\perp$ orthogonale vectoren, allen verschillend van de nulvector (dus voor alle $i \neq j$ geldt $\langle v_i, v_j \rangle = 0$). Dan is α een **vrije verzameling**.

orthogonaliteit helpt bij het

rekenen en controleren van lineaire onafhankelijkheid

• def 6.24: Zg $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte. Een basis $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ van V , is zo dat:

$$(1) \langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ voor alle } i \neq j \text{ en}$$

$$(2) \|v_i\| = 1 \text{ voor alle } i$$

noemen we een **orthonormale basis** van V . Indien we enkel (1) eisen, spreken we vlt **orthogonale basis**.

- de standaardbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$ met $e_i = (0 \dots 0 \underset{\text{op pos.}}{1} 0 \dots 0) \in \mathbb{R}^n$ vormt een orthonorm. basis voor $\mathbb{R}^n$
- eigenschap (1) en (2) ineen schijnen als het Kroneckers delta δ_{ij} :

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j \\ 1 & \text{als } i = j \end{cases}$$

bewijs

- **stelling 6.26:** Zg $(V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte en zg $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ een orthonormale basis van V . Beschouw willek. vect v en w in V , met resp. $(x_1, \dots, x_n)$ en $(y_1, \dots, y_n)$ in $\mathbb{R}^n$ als coörd. tov β . Dan is $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

↳ Uit het bewijs leren we dat $\langle v, w \rangle = \langle \text{co}_\beta(v), \text{co}_\beta(w) \rangle$ de scalaire vorm (inproduct) wordt dus ook bewaard door de coörd. fct (isomorfisme) en dus ook de lengte en hoeken

- **extra:** coörd. vte vector tov een orthonorm. basis makkelijk te berekenen. Stel $x \in V$ schrijven als lin. comb van $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

Dan, omdat β orthonormaal:

$$\langle x, v_i \rangle = \langle x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, v_i \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \langle v_j, v_i \rangle = x_i \langle v_i, v_i \rangle = x_i$$

$$\text{Dus maar } x = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle \cdot v_i$$

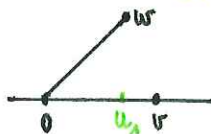
- **stelling 6.27:** Zg $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte en $\{v_1, \dots, v_k\}$ een willek. basis van V , dan kan deze basis omgevormd worden tot een orthonormale basis $\{u_1, \dots, u_n\}$ op algebraïsche wijze.

Deze werkwijze staat bekend als het orthogonalisatie-procédé van Gram-Schmidt.

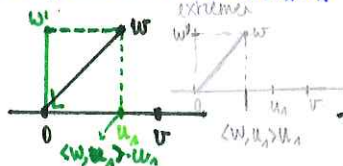
- voor volledige werkwijze: zie bewijs

grafisch:

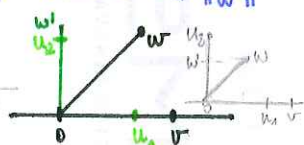
$$\text{normeer: } u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$



$$\text{orthogonaliser: } w^1 = w - \langle w, u_1 \rangle u_1$$



$$\text{normeer: } u_2 = \frac{w^1}{\|w^1\|}$$



- **def 6.30:** Zg $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte en U een deelruimte van V . we definiëren het orthogonaal complement van U als

$$U^\perp = \{v \in V \mid v \perp u \text{ voor alle } u \in U\}$$

- dit is inderdaad een deelruimte van V aangetoond:

$$1. 0 \in U^\perp$$

$$2. \text{ als } v_1, v_2 \in U^\perp, \text{ dan geldt voor alle } u \in U \text{ dat } \langle v_1 + v_2, u \rangle = \langle v_1, u \rangle + \langle v_2, u \rangle = 0 + 0 = 0$$

$$3. \text{ als } v \in U^\perp \text{ en } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ dan geldt voor alle } u \in U:$$

$$\langle \lambda v, u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle = \lambda \cdot 0 = 0$$

inwoorden $U^\perp$ in de verzameling van alle vect. die $\perp$ op alle vecten U

dit schrijven op unieke manier als iets $\perp$ op U

• **Stelling 6.31:** Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte in U een deelruimte van V dan geldt dat:

1. $U + U^\perp = U \oplus U^\perp$
2. $U \oplus U^\perp = V$
3. $\dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} U^\perp = \dim_{\mathbb{R}} V$
4. $(U^\perp)^\perp = U$

• Een lineaire (lineaire) afbeelding:

In Euclidische ruimte $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nemen we een deelruimte U met een orthonorm. basis $\beta_U = \{u_1, \dots, u_k\}$. We definiëren de afb:

$$p: V \rightarrow V: v \mapsto \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_k \rangle u_k$$

Het is eenvoudig te zien dat p lineair is en dat $p(v) \in U, \forall v \in V$.

Voor een willek $u \in U$ geldt trouwens dat $p(u) = u$

en dus dat $\forall v \in V: p(p(v)) = p(v)$

Verder is $p(v) = 0$ als $v \in U^\perp$

Er geldt ook de volgende stelling:

• **Stelling 6.33:** Als U een deelruimte is van de Euclidische ruimte $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ en $v \in V$, dan is $p(v)$ de vector in U op minimale afstand van v .

Dit alles zorgt voor de meerkeudige interpretatie:

$p(v)$ is de vect. in U het dichtst bij v en

$v \in V$ die orthogon. op U staan $\bar{v}$ op de nulvect. afgebeeld

$\Rightarrow p$ is de loodrechte projectie

• **Def 6.34:** Als U een deelruimte is van de Euclidische ruimte $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ en $\beta_U = \{u_1, \dots, u_k\}$ een willekeurige orthonormale basis van U , dan noemt men de afbeelding

$$pr_U: V \rightarrow V: v \mapsto \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_k \rangle u_k$$

de **orthogonale projectie van V op U** .

* alle begrippen in 6.3. zijn te veralgemenen, op analoge manier, tot Hermitische producten en unitaire ruimten (ihs orthonorm. basis)

6.4. Transformaties met een symmetrische matrix

• we werken in de standaard Euclidische ruimte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ met inproduct $\langle X, Y \rangle = X^T Y \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ als Endomect.

We kijken naar lin. transf $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: X \mapsto AX$ met symm $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

• **Lemma 6.36:** Zij $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de standaard Eucl. ruimte in $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: X \mapsto AX$ een lin. transf met symm matrix A .

Dan heeft A uitsluitend reële eigenwaarden

m.w. dan ontstaat op $\mathbb{R}^n$ volledig als mod van λ geadj. o.c.e. $\mathbb{R}$.

• matrices v/h type $A^T = A$ is een **Hermitische matrix** met $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

voor de Hermitische ruimte geldt bestaan

lemma met symm. reële A of Hermitische matrix A .

• lemma 6.38: Zg $(\mathbb{R}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de standaard Euclidische ruimte en $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: X \mapsto AX$ een lin. transformatie met een symm matrix A . Dan zijn eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden van A orthogonaal.

ook deze eig. blijft gelden in de standaard unitaire ruimte met lin. transf. $L_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n: X \mapsto AX$, bepaald door Herm. matrix A .

• lemma 6.40: Zg $(\mathbb{R}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de standaard Euclidische ruimte en $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: X \mapsto AX$ een lin. transf. met een symmetrische matrix A . Dan is, voor elke eigenwaarde λ van L_A , de meetkundige multipliciteit d.w. gelijk aan de algebraïsche multipliciteit $m(\lambda)$.

↳ uiteraard ook waarvoor stand. unitaire ruimte $\mathbb{C}^n$ met Herm. matr. A

⇒ stelling 6.42: **Spektralestelling voor symmetrische matrices**

Zg $(\mathbb{R}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ standaard Euclidische ruimte en $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: X \mapsto AX$ een lineaire transformatie met symmetrische matrix A .

Daar bestaat er een ortonormale basis voor $\mathbb{R}^n$ bestaande uit eigenvectoren van A .

Maar dan is A gelijkvormig met een diagonaal matrix en de gelijkvormigheid kan gerealiseerd worden door een basisverandering van de ortonormale standaardbasis naar een ortonormale basis.

bemerking: Een symmetrische matrix A is orthogonaal diagonaliseerbaar.
in algemener geformuleerd voor $\mathbb{C}^n$:

• stelling 6.43: **Spektralestelling voor Hermiteische matrices**

Zg $(\mathbb{C}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ standaard unitaire ruimte en $L_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n: X \mapsto AX$ een lin. transf. met een Hermiteische matrix A . Dan bestaat er een ortonormale basis voor $\mathbb{C}^n$ bestaande uit eigenvectoren van A .

Maar, dan is A gelijkvormig met een diagonaal matrix, en de gelijkvormigheid kan gerealiseerd worden door een basisverandering van de ortonormale standaardbasis naar een ortonormale basis.

• inhoud: stand. inpr. ood: $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}: \langle X, AY \rangle = \langle A^T X, Y \rangle \rightarrow \text{symm } A: A = A^T$
voor " Herm. pr. ood: $\forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}: \langle X, AY \rangle = \langle \bar{A}^T X, Y \rangle \rightarrow \text{Herm } A: A = \bar{A}^T$

6.5. Orthogonale matrices

• matrix van basisverandering P (voor $P^{-1}AP = \Lambda$) is dus opgebouwd uit vectoren die een ortonorm. basis van $\mathbb{R}^n$ vormen

bewijs

- **stelling 6.46:** Zg $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de standaard Euclidische ruimte en $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een vierhante matrix. Dan zijn idgerde beweringen equiv.
1. de kolommen van A vormen een orthonorm basis van $\mathbb{R}^n$
 2. $A^T \cdot A = I_n$
 3. $A^{-1} = A^T$
 4. $A \cdot A^T = I_n$
 5. de rijen van A vormen een orthonorm. basis van $\mathbb{R}^n$

• **def. 6.47:** Een matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ noemen we een **orthogonale matrix** als $A^T = A^{-1}$ (of equivalent als A aan de beweringen van stelling 6.46 voldoet).

• **stelling 6.48:** Zg $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een symmetrische matrix. Dan bestaat er een orthogonale matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zodat $P^{-1}AP = P^TAP$ een diagonaalmatrix is.

bewijs

↳ Omgekeerd: Voor $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: als er een orthogonale matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bestaat zodat $P^{-1}AP = P^TAP$ een diagonaalmatrix is, dan is A symm.

bewijs

• **lemma 6.50:** Als $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een orthogonale matrix, dan geldt dat

- 1) $\det A \in \{-1, 1\}$
- 2) elke (reële) eigenwaarde van A gelijk is aan $+1$ of -1 .

bewijs

• **stelling 6.51:** Zg $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ standaard Euclidische ruimte en veronderstel dat $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: x \mapsto Ax$ een lin. transf. met orthogon. matrix A , dan geldt:

- 1) $\|A \cdot x\| = \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$
- 2) $d(Ax, Ay) = d(x, y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$
- 3) L_A is een isometrie
- 4) als $\{u_1, \dots, u_n\}$ een orthonorm. basis van $\mathbb{R}^n$ is, is $\{L(u_1), \dots, L(u_n)\}$ eveneens een orthonorm. basis.

• De complexe variant van orthogon. matrix is de **unitaire matrix** $A \in \mathbb{C}^n$: $A^T = A^{-1}$ id stand. unitaire ruimte. Alle resultaten hierboven vernoemd kun vervolgmeend w. interpreteren van $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ en unitaire matrices

• **lemma 6.50:** determinant en eigenwaarden hebben modulus 1

lemma 6.48:

• **stelling 6.53:** Zg $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ een Hermitische matrix. Dan bestaat er een unitaire matrix $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zodat $P^{-1}AP = P^TAP$ een diagon. matrix is.

6.51 meetkundig: een lin. transf. met een orthogon. matr. is een **rotatie** dwz een bijectie van $\mathbb{R}^n$ die lengte, opt. afstand behoudt respectievelijk $\det +1$ oriëntatie behoudend, $\det -1$ oriëntatie omkerend

• **stelling 6.57:** Als $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ een orthogonale matrix is, dan geldt voor de matrixnorm of Frobeniusnorm:

$$\|A\|_F = \|P \cdot A\|_F$$

bewijs

Lineaire algebra : bewijzen

H1 - Eerstegraadsvergelijkingen in matrices

- propositie 1.8:** omvormen matrix naar echelonvorm en rijgereduceerde vorm
Elke matrix is rijequivalent met een matrix in echelonvorm en zelfs met een rijgereduceerde matrix.

bewijs

We beschouwen een willek. matrix A met m rijen en n kolommen.

$$A^{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

we kiezen een rij i waarvan het leidende element maximaal naar links staat. we wisselen in de ERO $R_j \leftrightarrow R_i$ op st.

we maken het leidende element nu 1 door $R_i \rightarrow \lambda R_i$ met $\lambda = \frac{1}{\text{leidende el.}}$

$$\text{dan is } A^{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_2 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_m & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

hierop passen we nu $R_j \rightarrow R_j - \lambda_j R_i$ met $j = 2, \dots, m$ op toe zodat

$$\text{we het volgende krijgen: } A^{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

we herhalen nu dezelfde procedure maar dan toepast op de omkaderde deelmatrix en blijven dit herhaaldelijk doen tot we niets meer overhouden of tot er enkel een matrix $B \in A^{m \times n}$ met $B = \vec{0}$ overblijft. Dan staat de matrix in echelonvorm.

Om den rijgereduceerde matrix te krijgen, maken we de ERO vid. vorm

$R_j \rightarrow R_j - \lambda_j R_i$ toepassen. Beginnend met i als de onderste rij passen we dit toe op alle R_j met $j < i$ en dit herhalen we totdat $i = 1$

- de oploppingsverzameling van een tekel verandert niet na het uitvoeren van een ERO $R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j$

bewijs TB $S = \text{opl } S \Leftrightarrow S = \text{opl } S'$

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i-1,1}x_1 + a_{i-1,2}x_2 + \dots + a_{i-1,n}x_n = b_{i-1} \\ a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \dots + a_{j,n}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \quad S' = \begin{cases} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ R_j \\ \vdots \\ R_m \end{cases}$$

een oplossing van dit willekeurig tekel is $s \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in het n -tal $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ zodat voor elke $i \in \{1, \dots, m\}$ geldt dat $a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \dots + a_{in}s_n = b_i$

नमो

we voeren nu op S de volgende ERO uit, nl $R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j$
in de kolom S_i

$$\delta' \begin{cases} a_{1n}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \\ \dots \\ (a_{1n}x_1 + \dots + a_{in}x_n) + \lambda(a_{jn}x_1 + \dots + a_{jn}x_n) = b_i + \lambda b_j \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} R_i'$$

en nu gedruktverderd:

$\Rightarrow$ geg $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ is op van S

dus $a_{1n}s_1 + \dots + a_{in}s_n = b_i$

en $a_{jn}s_1 + \dots + a_{jn}s_n = b_j$

we weten ook $R_i' = R_i + \lambda R_j = a_{1n}s_1 + \dots + a_{in}s_n + \lambda(a_{jn}s_1 + \dots + a_{jn}s_n)$

we controleren of $a_{1n}s_1 + \dots + a_{in}s_n + \lambda(a_{jn}s_1 + \dots + a_{jn}s_n) = b_i + \lambda b_j$

$s = (s_1, \dots, s_n)$ geldt als gdt ook voor de andere rijen v. δ'

$\Leftarrow$ we weten $R_i' = R_i + \lambda R_j \Leftrightarrow R_i = R_i' - \lambda R_j$

$$= a_{1n}s_1 + \dots + a_{in}s_n + \lambda(a_{jn}s_1 + \dots + a_{jn}s_n) - \lambda(a_{jn}s_1 + \dots + a_{jn}s_n)$$

en vinden $a_{1n}s_1 + \dots + a_{in}s_n + \lambda(a_{jn}s_1 + \dots + a_{jn}s_n) - \lambda(a_{jn}s_1 + \dots + a_{jn}s_n) = a_{1n}s_1 + \dots + a_{in}s_n = b_i$

in dus is s een gdt van elke andere rijen van S

concl s is een gdt van R_i en dus ook van S , net zoals het een gdt is van R_i' en dus ook van δ'

Eigenschappen 1.20 & 1.21:

$(A+B)+C = A+(B+C)$

Bewijs $LL: (A+B)_{ij} + (C)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} + (C)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} \quad] LL=RL$
 $RL: (A+(B+C))_{ij} = (A)_{ij} + (B+C)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}$
voor alle elementen $\rightarrow$ gdt

$A+0 = A=0+A$

Bewijs $LL: (A+0)_{ij} = A_{ij} + 0_{ij} = A_{ij} + 0 = A_{ij}$

$ML: A_{ij}$

$RL: A_{ij} = 0 + A_{ij} = (0+A)_{ij} \rightarrow$ algemeen

Bewijs $A+(-A) = 0$

$LL: (A+(-1)A)_{ij} = A_{ij} + (-1)A_{ij} = A_{ij} - A_{ij} = 0$

$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

Bewijs $LL: ((\lambda+\mu)A)_{ij} = (\lambda+\mu)A_{ij}$

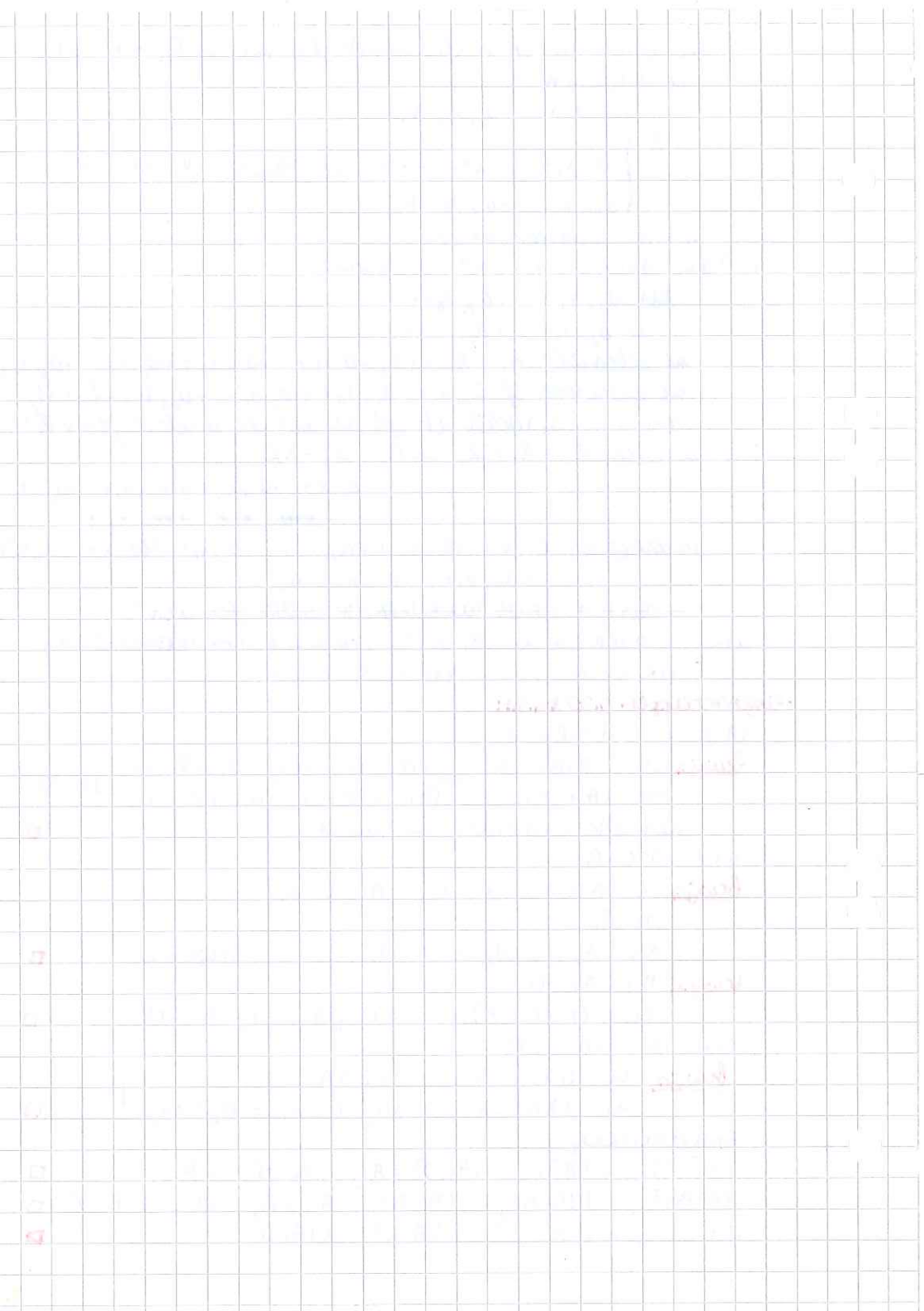
$AL: (\lambda A + \mu A)_{ij} = \lambda A_{ij} + \mu A_{ij} = A_{ij}(\lambda + \mu) =$

Restanaloo

$((A^T)^T)_{ij} = (A^T)_{ji} = (A_{ji})^T = A_{ij} \rightarrow (A^T)^T = A$

$((A+B)^T)_{ij} = [(A+B)_{ji}]^T = (A_{ji} + B_{ji})^T = (A_{ji})^T + (B_{ji})^T$

$((\lambda A)^T)_{ij} = ((\lambda A)_{ji})^T = (\lambda A_{ji})^T = \lambda (A_{ji})^T$



• eigenschappen 1.24:

$$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Bewijs: $[[A \cdot (B+C)]_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} (B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ik} (B_{kj} + C_{kj})$
 $= \sum_{k=1}^n (A_{ik} B_{kj} + A_{ik} C_{kj}) = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} + \sum_{k=1}^n A_{ik} C_{kj} = RL$
 $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
 $= (AB)_{ij} + (AC)_{ij}$

bewijs analoog hierboven

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Bewijs: $[(A \cdot B)^T]_{ij} = [(A \cdot B)_{ji}]^T = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^n A_{jk} B_{ki}$
 $= \sum_{k=1}^n (A_{jk})^T (B_{ki})^T = \sum_{k=1}^n (B_{ie})^T (A_{kj})^T = \sum_{k=1}^n (B^T)_{ie} (A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij}$

$$\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$$

Bewijs: $(\lambda(A \cdot B))_{ij} = \lambda(A \cdot B)_{ij} = \lambda \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^n (\lambda A_{ik}) B_{kj} = \sum_{k=1}^n (\lambda A)_{ik} B_{kj}$
 $= \sum_{k=1}^n A_{ik} (\lambda B)_{kj}$

$$I_n B = B$$

Bewijs: $(I_n B)_{ij} = \sum_{k=1}^n (I_n)_{ik} B_{kj} = I_{ni} B_{ij} = B_{ij}$
 met $k \neq i \Rightarrow I_{ie} = 0$, $k=i \Rightarrow I_{ie} = 1$

$$A \cdot I_n = A$$

bewijs analoog met hierboven

$$(\lambda I_n) \cdot A = A \cdot (\lambda I_n)$$

Bewijs: $[(\lambda I_n) A]_{ij} = \sum_{k=1}^n (\lambda I_n)_{ik} A_{kj} = (\lambda I_n)_{ii} A_{ij} = \lambda A_{ij} = A_{ij} \lambda = \sum_{k=1}^n (A_{ik}) (\lambda I_n)_{kj}$

$$A(B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

Bewijs: $[A(B \cdot C)]_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} (B \cdot C)_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ik} \cdot \sum_{t=1}^m B_{kt} C_{tj}$
 $= \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^m A_{ik} B_{kt} C_{tj} = \sum_{t=1}^m (AB)_{it} C_{tj} = [(AB) \cdot C]_{ij}$

• opdracht 1.25: Zij $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en $x \in \mathbb{R}^n$:

1) als $AX = 0$, dan is $A = 0$

Bewijs: aangenomen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en $x \in \mathbb{R}^n$ is het resultaat, zeg $S \in \mathbb{R}^{m \times 1}$

$$\text{dan is } S_{i2} = (AX)_{i2} = \sum_{k=1}^n A_{ik} x_{k1} = 0$$

dit geldt voor alle mogelijke x_{k1} 's, help voor bijvoorbeeld

$$x_{11} = 1 \text{ en de andere } x_{k1} \text{'s} = 0: B_{i1} = A_{i1} x_{11} = A_{i1} = 0$$

nu zijn alle elementen van A op kolom 1 0.

kies nu x zo dat $x_{21} = 1$ en de rest 0, dan is de 2e kolom van A ook 0. Dit geldt zo voor alle kolommen van A

$$\Rightarrow A = 0$$

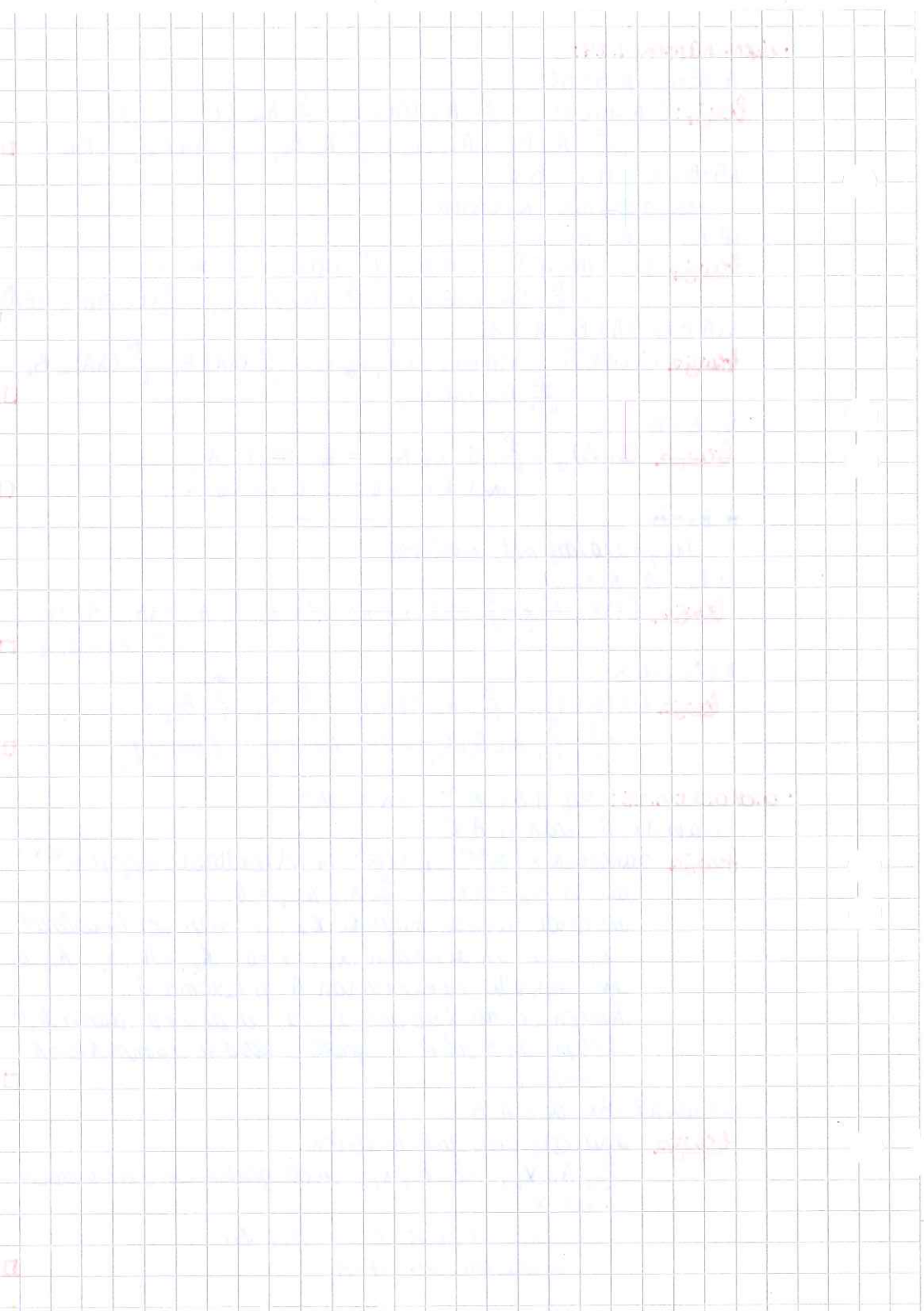
2) als $AX = BX$, dan $A = B$

Bewijs: analoog aan dat hierboven

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} x_{k1} = \sum_{k=1}^n B_{ik} x_{k1} \text{ moet gelden voor alle keuzes voor } x$$

$$\text{Stel } x_{11} = 1, \text{ rest } = 0 \Rightarrow A_{i1} = B_{i1}$$

$$\text{herhalen} \rightarrow A = B$$



• opdracht 1.27: $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\text{Tr}(A \cdot B) = \text{Tr}(B \cdot A)$

bewijs $\text{Tr}(A \cdot B) = \sum_{i=1}^n (A \cdot B)_{ii} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ji} \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n A_{ij} B_{ji}$
 $= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n B_{ji} A_{ij} = \sum_{j=1}^n (B \cdot A)_{jj} = \text{Tr}(B \cdot A)$

• stelling 1.28: Een stelsel vergt heeft ofwel geen, ofwel juist één, ofwel o veel oplossingen.

bewijs

We noteren het stelsel in matrixvorm $Ax = b$.
 Als het oplosbaar is, heeft het minstens één oplossing. We tonen aan dat van zodra het 1 opl. heeft, het er o veel heeft.

Neem nu x_1 en x_2 , twee verschillende oplossingen, dan kunnen we nog een oplossing construeren, namelijk $x_1 + \lambda(x_2 - x_1) = x^{(\lambda)}$ worden welke reël of complex getal λ . x_1, x_2 en $x^{(\lambda)}$ zijn kolomvect.

Dit is een oplossing, want:

$$A \cdot x^{(\lambda)} = A(x_1 + \lambda(x_2 - x_1)) = Ax_1 + \lambda(Ax_2 - Ax_1) \\ = b + \lambda(b - b) = b$$

voor elke waarde van λ vinden we dus een oplossing $x^{(\lambda)}$ v/h stelsel. Er zijn legio's, want $x^{(\lambda_1)} \neq x^{(\lambda_2)}$ als $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

• stelling 1.32: Als $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ links inverse B en rechts inverse C heeft $\Rightarrow B=C$.

bewijs $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$

dan $B = B \cdot I_n = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = I_n \cdot C = C$.

$\Rightarrow$ 1.32: Indien een inverse B^A van $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bestaat, is die uniek.

bewijs Stel $B_1 \neq B_2$ zijn 2 ~~inverse~~ linksinverse van A en een rechtsinverse, dan

$$B_1 = B_1 \cdot I = B_1(A \cdot C) = (B_1 A) \cdot C = I \cdot C = B_2(A \cdot C) = B_2 \cdot I_n = B_2$$

dit is tegengesteld (contradictie) $\Rightarrow$ maar 1 inverse

• stelling 1.34: Als A en B inverteerbaar zijn, dan geldt: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

bewijs we rekenen na dat $B^{-1} \cdot A^{-1}$ de inverse is van $A \cdot B$

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

• opdracht 1.35:

1) als A invert. dan ook A^{-1} invert en $(A^{-1})^{-1} = A$

bewijs

$$A \cdot A^{-1} = I \Leftrightarrow (A \cdot A^{-1})^{-1} = I^{-1} = I$$

$$\Leftrightarrow (A^{-1})^{-1} \cdot A^{-1} = I \Leftrightarrow (A^{-1})^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A = I \cdot A$$

$$\Leftrightarrow (A^{-1})^{-1} = A$$

2) als A invert. dan ook A^T met $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

bewijs

$$(A \cdot A^{-1})^T = I^T = I \Leftrightarrow (A \cdot A^{-1})^T = I^T = I$$

$$\Leftrightarrow (A^{-1})^T \cdot A^T = I$$

gen analog

3) B heeft kolom nullen $\Rightarrow AB$ kolom nullen

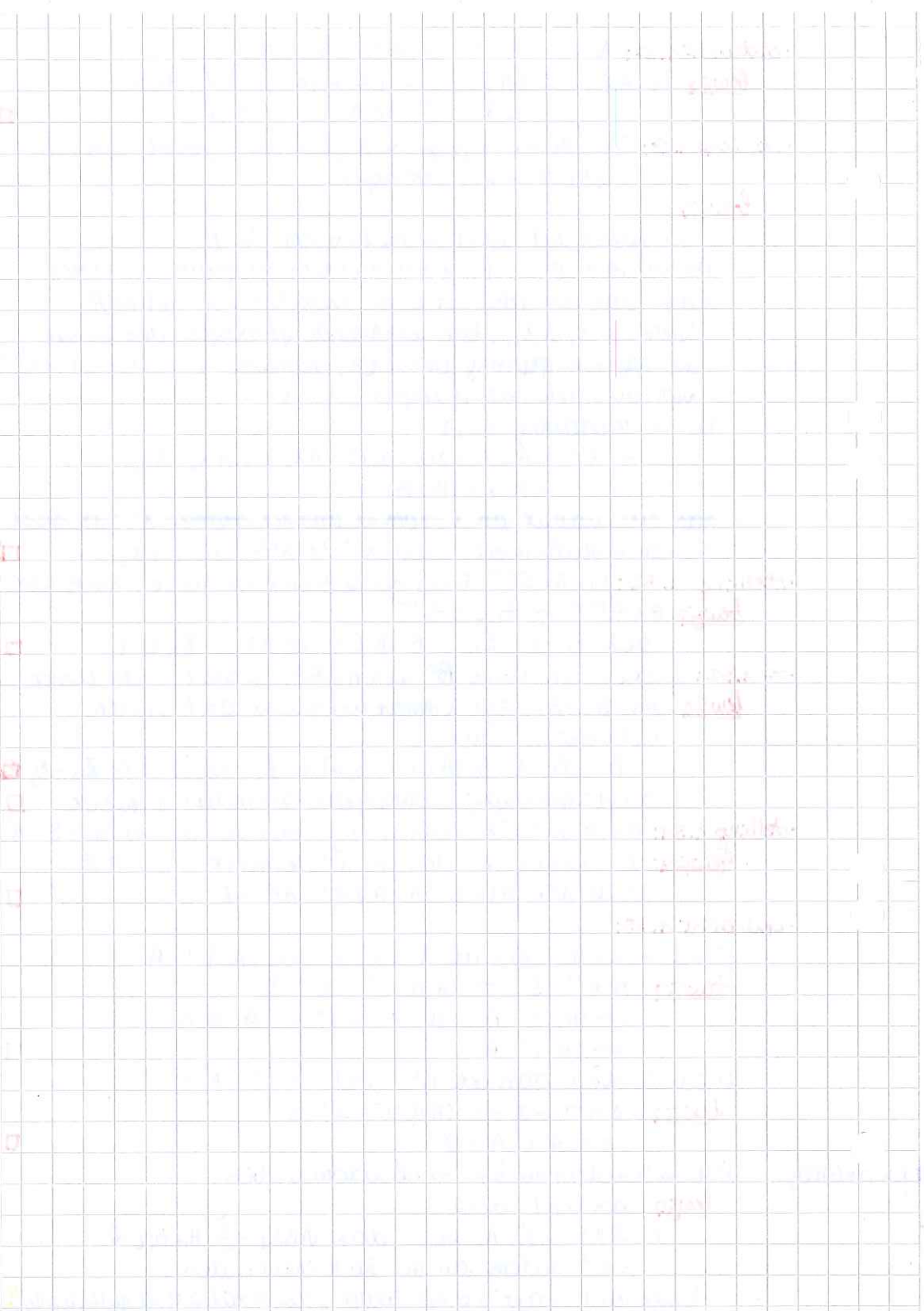
bewijs

voor bep. l: $B_{ii} = 0$

en $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$ dan $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} = 0$

$\rightarrow$ 1^{de} kolom van AB heeft enkel nullen

B niet invert. want AB met onder welke A zal altijd null kolomlig.



• **opdracht 1.35:**

4) A invert in $AB=AC \Rightarrow B=C$

bewijs $A^{-1} \cdot AB = A^{-1} \cdot AC \Leftrightarrow IB = IC \Leftrightarrow B=C$

• **stelling 1.39:** Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dan zijn volgende beweringen equivalent:

- 1) A heeft links inverse B;
- 2) $AX=0$ heeft enkel de gpl $x=0$;
- 3) A is rj-equivalent met de eenheidsmatrix I;
- 4) A is een product van elementaire matrices;
- 5) A is inverseerbaar met inverse B;
- 6) A heeft rechts inverse B.

bewijs

1) $\Rightarrow$ 2) stel B links inverse van A

$$\begin{aligned} AX &= 0 \\ \Rightarrow BAX &= B \cdot 0 = 0 \\ \Rightarrow IX &= X = 0 \end{aligned}$$

~~dan~~ $A \cdot X = 0 \Rightarrow X = I_n X = (BA)X = B(A \cdot X) = B \cdot 0 = 0$

2) $\Rightarrow$ 3) $AX=0$ heeft enkel nuloplossing $\rightarrow$ geen vrije variabelen
 $\rightarrow$ enkel gebonden variabelen $\rightarrow$ A via ERO's van Gauss-eliminatie rj-equiv. met I_n

3) $\Rightarrow$ 4) Als A rj-equiv met I_n dan kan A dus na opschrijving van ERO's herleid w tot I_n

$$\rightarrow \exists E_1, E_2, \dots, E_k: E_k \cdot E_{k-1} \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$$

aangemerkt elke ERO invert is en de inverse van E_n ook een el. matrix is, krijgen we dat:

$$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \dots \cdot E_k^{-1} \cdot I_n$$

indus product van el. matrices

4) $\Rightarrow$ 5) $A = E_m \cdot \dots \cdot E_1$ (qg)

$$\Rightarrow E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \dots \cdot E_m^{-1} \cdot A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \dots \cdot E_m^{-1} \cdot E_m \cdot \dots \cdot E_1 = I_n$$

$$\Rightarrow E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \dots \cdot E_m^{-1} \cdot A = I_n$$

$$\Rightarrow B = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \dots \cdot E_m^{-1}$$

5) $\Rightarrow$ 6) $A = E_m \dots$ Als A inverseerbaar is, heeft A natuurlijk een rechts inverse

6) $\Rightarrow$ 1) Als A de matrix B als rechts inverse heeft, dan is A de links inverse van B. Bestaande redeneringen toegepast op B geeft dan dat B inverseerbaar is endus links inverse is van A

• **lemma 1.44:** Voor $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ geldt:

1) A, B lervendichhoeks $\Rightarrow AB$ lervendichhoeks.

bewijs we weten $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$

als A lervend is, dan zijn ikt rij van A alle elementen a_{ik} met $k > i$ gelijk aan 0.

In kolom j van B zijn voor $k > j$ alle elementen $b_{kj} = 0$

veronderstel nu $i > j$ (bovenste gedeelte), dan geldt:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^j a_{ik} \cdot 0 + \sum_{k=j+1}^n 0 \cdot b_{kj} = 0$$

$\Rightarrow AB$ is lervendichhoeks

2) A, B lervendichhoeks, dan AB lervendichhoeks

volgt uit de
 rij van invert
 matrixprod
 en el. matrices

Stelling 1.48: Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invert. en via rijoperaties zonder rijen te verwisselen in trapvorm te brengen. Dan bestaat er een unieke benedenmatrix L met enkel 1 op de diagonaal en een unieke bovenmatrix U zodat $A = LU$.

Bewijs enkel de uniciteit aantonen

Stel dat $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$ met L_1, L_2 benedenmatrices met 1 op diagonaal en U_1, U_2 bovenmatrices

$$\begin{aligned} \text{Dan} \quad & L_1^{-1} L_1 U_1 = L_2 U_2 \\ \Rightarrow & L_1^{-1} L_1 U_1 U_1^{-1} = L_2^{-1} L_2 U_2 U_1^{-1} \\ \Rightarrow & L_1^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} \end{aligned}$$

de matrix in linkerlid: $L_1^{-1} L_1$ is beneden Δ met enkel 1 op diagonaal, analoog $U_2 U_1^{-1}$ boven

dit kan enkel als $L_1^{-1} L_1 = I_n = U_2 U_1^{-1}$ dus dan geldt dat $L_1^{-1} = (L_1)^{-1} \Rightarrow L_2 = L_1$ en analoog $U_1 = U_2$. □

H2 - Determinanten

Stelling 2.2: Als een afbeelding voldoet ald eig v.k. determinantaafbeelding, dan voldoet hij eveneens aan volgende eigenschappen:

D4: f is lineair in rij i , $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

D5: als er in A een nulrij of 2 gelijke rijen zit(ken), dan is $f(A) = 0$.

Bewijs (D-4) We verwisselen $R_i \leftrightarrow R_n$. Hierdoor verandert het teken van $f(A)$. Nu is R_n (oude R_i) lineair. Na het toepassen vld lineariteit wisselen we opnieuw $R_i \leftrightarrow R_n$ zodat het teken terug verandert.

(D-5) Stel R_i en R_j zijn gelijk. Na $R_i \leftrightarrow R_j$ xon $f(A)$ van teken moeten veranderen, maar dat xon ook $f(A) = -f(A)$ door de gelijke rijen $\Rightarrow f(A) = -f(A) = 0$

Stel R_k is een nulrij. M.v. lineariteit is te schrijven dat $R_k = 0 = R_k' - R_k'$ dus dan krijgen we $f(R_k') - f(R_k') = 0$. □

Stelling 2.3: Voor determinantaafb $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$: $A \mapsto f(A)$ geldt:

1) ERO v. type $R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j$ ($j \neq i$) verandert niets aan $f(A)$

Bewijs door de lineariteit in de i -rij geldt:

$$f\left(\begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i + \lambda R_j \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}\right) + \lambda f\left(\begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}\right) = f(A) + 0$$

2) voor E el matrix geldt

$$f(E) = \begin{cases} 1 & \text{als } E: R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j \\ -1 & \text{als } E: R_i \leftrightarrow R_j \\ \lambda & \text{als } E: R_i \rightarrow \lambda R_i \end{cases}$$

Bewijs 1) $f(I) = 1$ en we hebben bewezen dat het toep van ERO $R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j$ niets verandert $\Rightarrow f(E) = 1$

2) $f(I) = 1$, vermenig λ gen $R_i \Leftrightarrow R_i$; verandert het teken $\Rightarrow$ dus $f(E) = -f(I) = -1$

3) $f(I) = 1$, vermenigvuldig rij i met λ : $R_i \rightarrow \lambda R_i \rightarrow 0R_i + \lambda R_i$
dus $f(E) = 0 f(I) + \lambda f(I) = \lambda$

3) als E el. matrix, dan $f(E \cdot A) = f(E) \cdot f(A)$

Bewijs 1) $E \mapsto R_i \rightarrow R_i + \lambda R_i$; dan halen we uit 1) dat

$$f(EA) = f(A) = 1 f(A) = f(E) f(A)$$

2) $E \mapsto R_i \Leftrightarrow R_i$; dan is E een rijomwisseling van A

$$f(EA) = -f(A) = -1 \cdot f(A) = f(E) f(A)$$

3) $E \mapsto R_i \rightarrow \lambda R_i$; dan

$$f(EA) = 0 f(A) + \lambda f(A) = \lambda f(A) = f(E) f(A)$$

Stelling 2.4: Als $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}: A \mapsto f(A)$ een determinantal afb is, dan geldt:

1) als A een Δ matrix is, dan is $f(A) = \prod_{i=1}^n A_{ii}$

Bewijs: als A een diagonaal matrix is, volgt het automatisch

uit eig dat elke rij lineair is en dat $f(I) = 1$

als A bovendiagonaal is, dan is A rijequivalent met een diagonaal matrix door uitwendig gebruikte

maten van $R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j$. De diagonaal matrix heeft dezelfde diagonaal. en $f(A)$ is niet veranderd.

als A echter een 0 op zijn diagonaal heeft staan, is de A rijequiv. met een matrix met een nulrij $\Rightarrow f(A) = 0$

2) A inverteerbaar $\Leftrightarrow f(A) \neq 0$

Bewijs 2 inclusies

$\Rightarrow$ A is invert $\Rightarrow A = E_1 E_2 \dots E_k$ met E_i element. matrices

$$\Rightarrow f(A) = f(E_1) \cdot f(E_2) \dots f(E_k) \neq 0$$

$\Leftarrow$ (via contrapositie) A niet invert $\Rightarrow f(A) = 0$

A rijequivalent met bovendiagonaal matrix U want $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\Rightarrow E_k \dots E_1 \cdot A = U \Rightarrow f(E_k) f(E_{k-1}) \dots f(E_1) f(A) = f(U)$$

stel A niet invert, dan ook U niet $\Rightarrow 0$ in diagonaal van U dus $f(U) = 0 \Rightarrow f(A) = 0$ want $f(E_i) \neq 0$

3) $f(A \cdot B) = f(A) f(B)$, $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Bewijs

als A niet invert dan ook $A \cdot B$ niet en dus inderdaad $0 = f(A) \cdot f(B) = f(A \cdot B)$

als A wel invert dan $A = E_1 E_2 \dots E_k$ element. matr.

$$\text{dus } f(A \cdot B) = f(E_1 \cdot E_2 \dots E_k \cdot B) = f(E_1) \dots f(E_k) f(B) = f(A) f(B)$$

4) $f(A^T) = f(A)$

Bewijs

als A invert is, dan ook A^T en omgekeerd

als A niet invert is, dan A^T ook niet, want

$$A \cdot A^T = I = (A \cdot A^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T$$

$R_i \rightarrow \lambda R_i$ diagonaal m.
omvormen tot I n
dus $f(A) = f(E_1 \dots E_n I)$
 $= f(E_1) \dots f(E_n) f(I)$
 $= \lambda_1 \dots \lambda_n \cdot 1$
 $= 0 \dots 0 \dots 0$

compleet
niet invert:
het geen in diag. dan
 $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$
dus dan $E_1 \dots E_n \cdot U = I$
en U niet invert
tegenwoordig dus
we op diag

Gerdeg 2.5

- 1) Als een det. g. l. staat, dan volgt dus dat $f(A)$ vll. bepaalt of de matrix al dan niet inverteerbaar is
- 2) Als f een det. g. l. is, en matrix A invert, dan is $f(A^{-1}) = \frac{1}{f(A)}$
- 3) Omdat $f(A) = f(A^T)$ kunnen we inderdaad alle eig. van f en van de indet. g. l. gelden

Lemma punt 2)

$$A \text{ invert} \Leftrightarrow f(A) \neq 0$$

$$\ln f(A \cdot B) = f(A) \cdot f(B) \quad \ln f(I) = 1$$

det nu:

$$f(A \cdot A^{-1}) = f(A) f(A^{-1})$$

$$\text{maar ook } f(A \cdot A^{-1}) = f(I) = 1$$

$$\text{dan } f(A) \cdot f(A^{-1}) = 1$$

$$\Rightarrow f(A^{-1}) = \frac{1}{f(A)}$$

□

$$4) f(A^T) = f(A)$$

Bewijs gewalsonderhouding

1) A niet invert $\Rightarrow A^T$ ook niet invert (zie voorp. p)
 $\Rightarrow f(A^T) = 0 = f(A)$

2) A wel invert $\Rightarrow A^T$ ook invert

$$A = E_1 \dots E_k \quad (\text{el. matrices})$$

$$\text{dus } A^T = (A)^T = (E_1 \dots E_k)^T = E_k^T \dots E_1^T$$

$\rightarrow$ voor $E: A_i \rightarrow \lambda R_i$: E diagonaalmatrix dus $E = E^T \Rightarrow f(E) = f(E^T)$

$\rightarrow$ voor $E: A_i \leftrightarrow R_j$: E is symmetrisch (2 omgewisselde rijen liggen resp. totdiag) $\Rightarrow E = E^T \Rightarrow f(E) = f(E^T)$

$\rightarrow$ voor $E: A_i \rightarrow A_i + \lambda R_j$: E is ^{element rij op diag} matrix dus $f(E) = \prod_{i=1}^n (E)_{ii} = 1 \rightarrow$ zelfde voor $E^T \Rightarrow f(E^T) = f(E) = 1$

dus voor elke mogelijke E geldt $f(E) = f(E^T)$

$$\text{dus } f(A) = f(E_1 \dots E_k) = f(E_1) \dots f(E_k) = f(E_k^T) \dots f(E_1^T) = f(E_k^T \dots E_1^T) = f(A^T)$$

Stelling 2.10: Zij σ een willekeurige permutatie en τ een transpositie in S_n .
 Dan geldt dat $\text{sgn}(\tau \circ \sigma) = -\text{sgn}(\sigma)$

Het noteren tellen met een transpositie verwisselt het teken.

Bewijs voor elke i in $\{1, 2, \dots, n\}$ is $\sigma(i) = a_i$

$$\text{dus } \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & i+1 & \dots & a_j & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_i & a_{i+1} & \dots & a_j & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

de transpositie τ verwisselt 2 elementen a_i en a_j (met $i < j$)
 $\hat{=}$ verband # inversions σ en # inversions $(\tau \circ \sigma)$?

stel $j = i+1$

$$\text{dan } \tau \circ \sigma: \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ a_1 & \dots & a_{i+1} & a_i & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

als $a_i < a_{i+1}$ heeft $\tau \circ \sigma$ dus i inversions meer

als $a_i > a_{i+1}$ heeft $\tau \circ \sigma$ dus i inversions minder

$\rightarrow$ beiden gevallen verwisselen het teken

algemeen door $2(j-i)-1$ keer het vorige speciale paar toe te passen kunnen we concluderen welke $\tau \circ \sigma$ behouden

1) $j-i$ keer a_i wisselen met het 'volgende' element geeft ons

$$\tau \circ \sigma: \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & i+1 & \dots & j-1 & j & \dots & n \\ a_1 & \dots & a_{i+1} & a_{i+1} & \dots & a_j & a_i & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

2) $j-i-1$ keer a_j wisselen met het 'vorige' element geeft

$$\tau \circ \sigma: \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & i+1 & \dots & j-1 & j & \dots & n \\ a_1 & \dots & a_j & a_{i+1} & \dots & a_{j-1} & a_i & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

in totaal geeft dit $2(j-i)-1$ omwisselingen.
 dit is altijd oneven dus hebben $\tau \circ \sigma$ een ander teken.

elk element $(j-i)$ keer naar rechts verschuiven

element voor positie j terug naar links verschuiven
 ($j-i-1$ keer)

oudlelijk
d hier
en daar
in direct
opgeschreven

• de eigenschappen D-1, D-2 & D-3 bekken uniek en volledige determinantafbeelding als volgt

$$\det: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : A \mapsto \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

bewijs dat de eig. wel zeker voldaan zijn

D-1: $f(I_n) = 1$ (TB)

$$f(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

maar aangezien $A = I_n$ in dit geval is $a_{kk}(k) = 1$ tenzij

σ is op zichzelf afgebeeld en dan is $a_{kk} = 1$

alle elementen ild som zijn 0 tenzij σ een enkele omruiling

uitvoert en $\prod_{k=1}^n \operatorname{sgn}(\sigma) a_{kk} = +1 \prod_{k=1}^n 1 = 1$

dus even is $\rightarrow$ met $\operatorname{sgn}(\sigma) = +1$

Wt klijpendus $f(I_n) = 1$

D-2: TB $f(A)$ verandert van teken als 2 rijen van plaats wisselen

rijen
zijn
gewisseld

$$\begin{aligned} f(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{j\sigma(j)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ f(A') &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{j\sigma(j)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma) a_{1\tau(\sigma(1))} \dots a_{n\tau(\sigma(n))} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1) \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= -1 f(A) \end{aligned}$$

ook bij
omwisseling
op wrijvings

D-3: TB f is lineair ild eerste rij

$$f(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{j\sigma(j)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$\begin{aligned} f(A') &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) (\lambda R_{1\sigma(1)} + \mu R'_{1\sigma(1)}) a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} [\lambda R_{1\sigma(1)} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} + \mu R'_{1\sigma(1)} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}] \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \lambda R_{1\sigma(1)} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \mu R'_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \lambda f\left(\begin{pmatrix} R_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right) + \mu f\left(\begin{pmatrix} R'_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

• stelling 2.23:

voor $A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$A \cdot \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{pmatrix}$$

bewijs voor $A \cdot \operatorname{adj}(A)$ ($\operatorname{adj}(A) \cdot A$ is analoog)

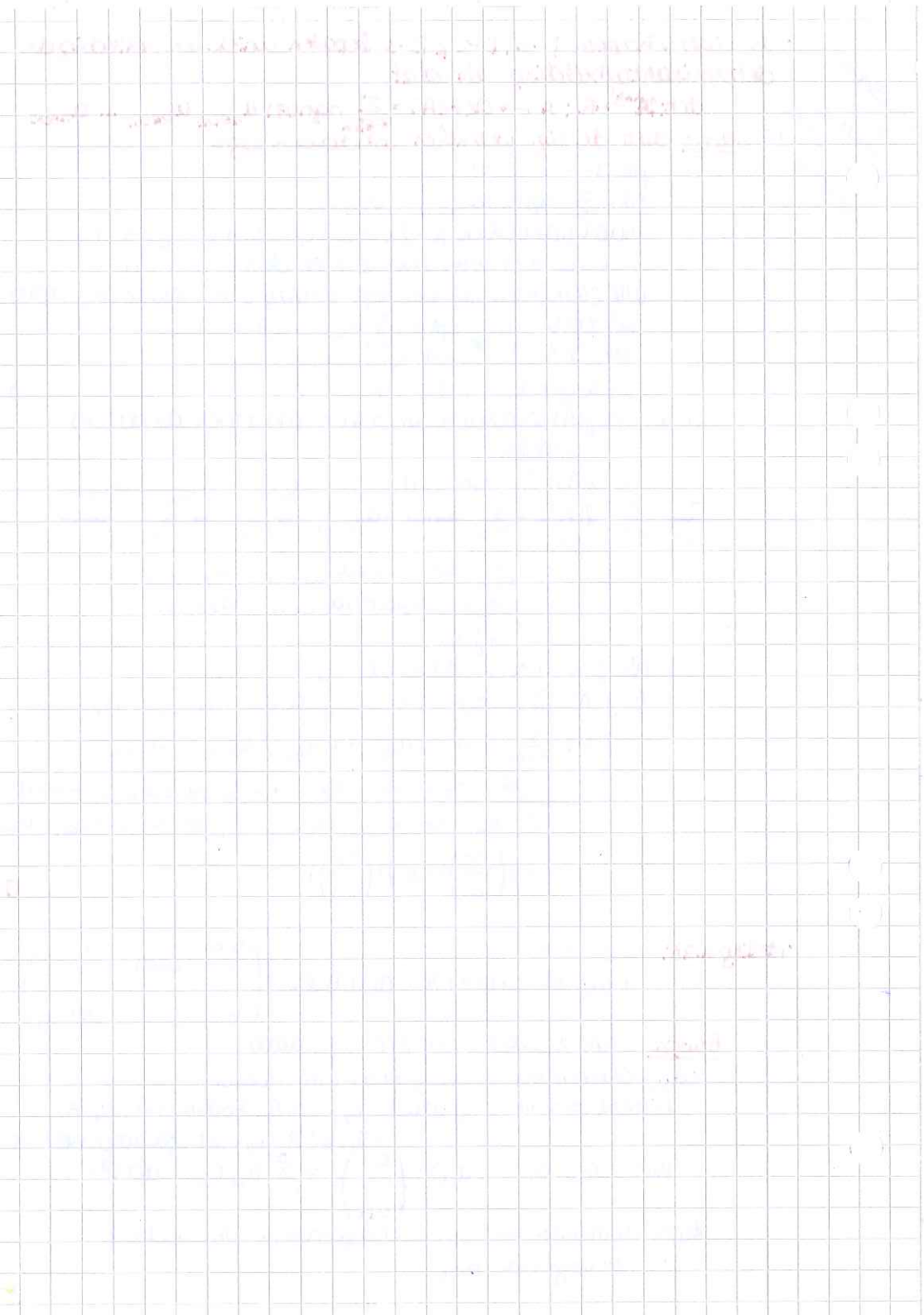
stap 1: elementen op de diagonaal vln product

element op positie ii product = rij i uit $A \cdot$ kolom i uit $\operatorname{adj}(A)$

= rij i uit $A \cdot$ rij i uit cofactorenmatrix

$$\text{dus } (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{in} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{ik} = \det(A)$$

stap 2: elementen niet op de diagonaal vln product
de volgende pag



stap 2: elementen niet op de diag. vln product

elementen op pos ij ($i \neq j$) vln product

$$(a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}) \cdot \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{1k} c_{kj}$$

addit. (R_i)
dus ontw naar R_j met op R_j coëf a_{1k}

ditte uitdrukking is de determinant van bepaalde matrix

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

elementen vln bep ij
maal w factoren andere ij
= berekenen vln determinanta
waartij we elementen
van ij veranderen
door ij

$$\Rightarrow \det(A') = 0 \text{ want 2 detselbe } ij$$

H3 - Vectorruimten

• lemma 3.7: In een vectorruimte $(R, V, +)$ geldt voor alle vect $v, w, x \in V$:

$$v + x = w + x \Rightarrow v = w$$

bewijs

$$v + x = w + x \Rightarrow (v + x) + x' = (w + x) + x'$$

$$\Rightarrow v + (x + x') = w + (x + x') \Rightarrow v + 0 = w + 0 \Rightarrow v = w$$

• lemma 3.8: In een vectorruimte $(R, V, +)$ geldt $\forall v \in V, \forall \lambda \in R$:

$$1) 0 \cdot v = 0 = \lambda \cdot 0$$

bewijs

$$\Rightarrow 0 \cdot v + v = 0 \cdot v + 1 \cdot v = (0 + 1) \cdot v = 1 \cdot v = v = 0 + v$$

$$\text{dus } 0 \cdot v = 0$$

$$\Rightarrow 0 \cdot \lambda + \lambda = 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \lambda = (0 + 1) \cdot \lambda = 1 \cdot \lambda = \lambda = 0 + \lambda$$

$$\text{dus } 0 \cdot \lambda = 0$$

$$2) (-1) \cdot v = -v = 1 \cdot (-v)$$

bewijs

$$\Rightarrow \text{axioma uit def. vectorruimte zelf zegt: } 1 \cdot (-v) = -v$$

$$\Rightarrow v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = 0 \cdot v = 0 = v - v$$

$$\text{dus } (-1) \cdot v = -v$$

$$3) (-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (-v)$$

bewijs

$$\Rightarrow (-\lambda) \cdot v = ((-1)\lambda) \cdot v = \lambda \cdot ((-1) \cdot v) = \lambda \cdot (-v)$$

$$\text{of } (-\lambda) \cdot v + \lambda \cdot v = (-\lambda + \lambda) \cdot v = 0 \cdot v = 0 \rightarrow (-\lambda) \cdot v \text{ TE } \lambda \cdot v$$

$$\Rightarrow (-\lambda) \cdot v = ((-1)\lambda) \cdot v = (-1) \cdot \lambda \cdot v = -\lambda \cdot v$$

$$\text{of } \lambda \cdot (-v) + \lambda \cdot v = \lambda \cdot (-v + v) = \lambda \cdot 0 = 0 \rightarrow \lambda \cdot (-v) \text{ TE } \lambda \cdot v$$

• opdracht 3.2: In $(R, V, +)$ geldt $\forall v \in V, \forall \lambda \in R$:

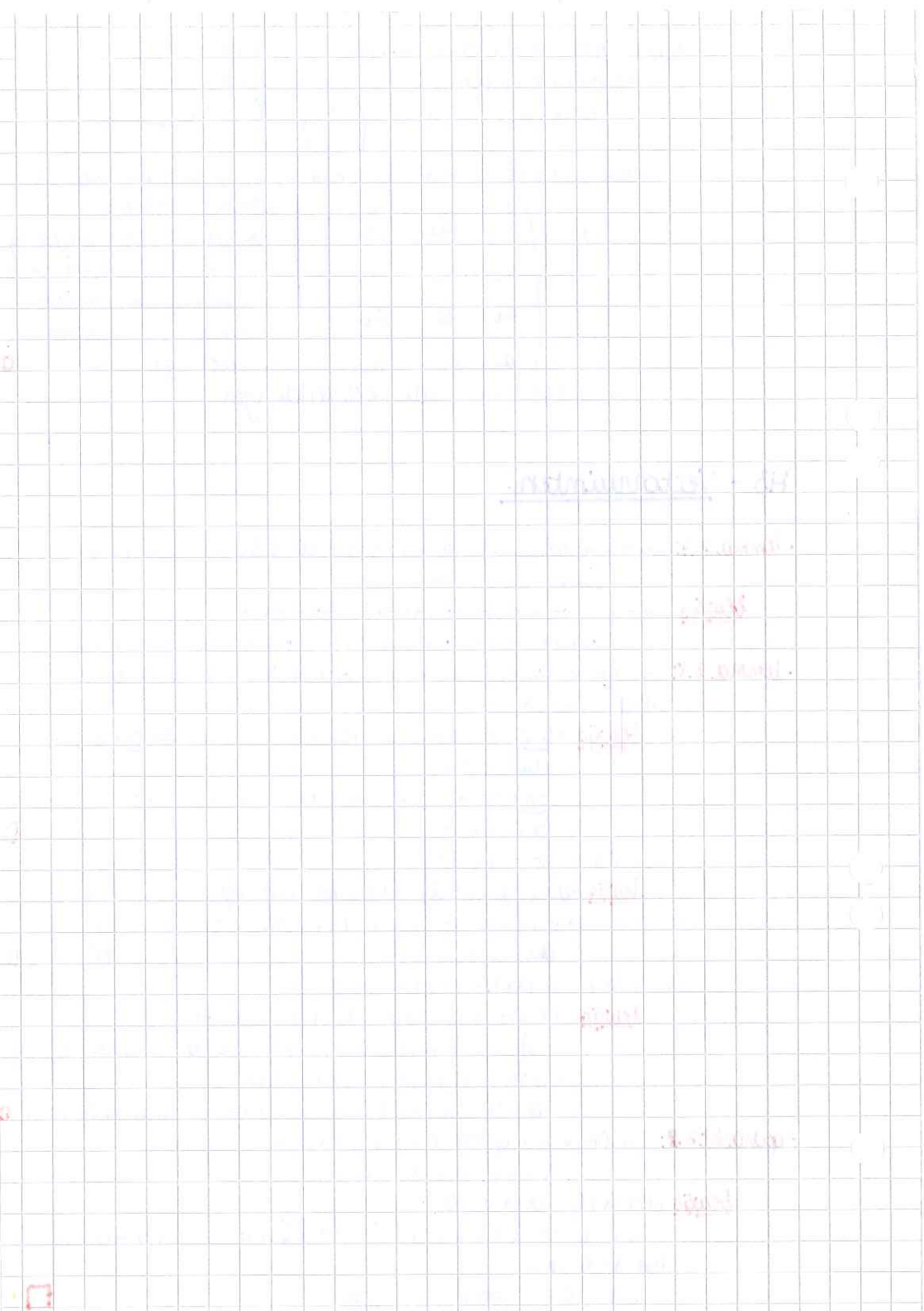
$$\lambda \cdot v = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee v = 0$$

bewijs stel $\lambda \neq 0$ in $\lambda \cdot v = 0$:

$$\lambda \cdot v = 0 \Rightarrow \overset{\lambda^{-1}}{\frac{1}{\lambda}} (\lambda \cdot v) = 0 \cdot \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \overset{\lambda \cdot 0 = 0}{\left(\frac{\lambda}{\lambda}\right)} \cdot v = 0 \Rightarrow 1 \cdot v = 0 \Rightarrow v = 0$$

$$\text{Afr } \lambda = 0 \text{ dan } \lambda \cdot v = 0:$$

$$0 \cdot v = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \text{OK}$$



Definitie 3.11: Deelruimte criterium

Zij gegeven vektorruimte $(V, +, \cdot)$. Dan is $U \subseteq V$ een deelruimte a.s.a.

• $U \neq \emptyset$

• $\forall x, y \in U: x+y \in U$

• $\forall x \in U; \forall \lambda \in \mathbb{R}: \lambda x \in U$

$\left. \begin{array}{l} \forall x, y \in U; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \alpha x + \beta y \in U \end{array} \right\}$

Lemma is niet eig:

$\Rightarrow$ Als U een deelruimte is van V , is U ook een vektorruimte in dus per def. niet eig. Voor $x, y \in U$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt dan ook dat $x+y \in U$ en $\lambda x \in U$ ("zo zijn '+' en ' $\cdot$ ' gedef.).

$\Leftarrow$ Stel dat U aan de 3 voorwaarden voldoet.

- 1) U is niet leeg dus bevat een element u . Uit v.w.3 volgt dan dat $-u \in U$ en dus ook (v.w.2) $u + (-u) = 0$. $\rightarrow$ neut. element
- 2) Hierboven stelde we al dat $-u \in U \rightarrow$ beginpunt. element
- 3) Alle andere axioma's zijn automatisch voldaan voor $U \subseteq V$ ($U \subseteq V$).

is niet ~ is niet eig (omgekeerde):

$\Rightarrow$ TB $\forall x, y \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R}: x+y \in U$ en $\lambda x \in U \Rightarrow \lambda x + y \in U$

B $x, y \in U$ en dus ook $x+y \in U$
en dus ook $\lambda x + y \in U$

$\Leftarrow$ TB $\forall x, y \in U; \forall \lambda \in \mathbb{R}: \lambda x + y \in U \Rightarrow x+y \in U$ en $\lambda x \in U$

B stel $\lambda = 1$: $1 \cdot x + y = x+y \in U$

stel $y = 0$: $\lambda x + 0 = \lambda x \in U$

• propositie 3.14: De deelruimte van een aantal deelruimten v.e. vektorruimte $(V, +, \cdot)$ is opnieuw een deelruimte van V .

Lemma stel U, W deelruimten van V

TB $U \cap W$ ook deelruimte van V

B $U \cap W$ is niet leeg want NE van V zit in U en W , dus ook in $U \cap W$

1) U en W zijn deelruimten dus voor $x, y \in U$ en $x, y \in W$ geldt voor $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: $\lambda x + \mu y \in U$ en $\lambda x + \mu y \in W$ dus $\lambda x + \mu y \in U \cap W$

• opdracht 3.18: Zij D een deelverzameling van $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

1) $\text{vct}(D)$ is de kleinste deelruimte die D omvat

Lemma stel $\mathcal{D}$ kleinste deelruimte die D omvat

TB $\mathcal{D} \subseteq \text{vct}(D)$

2) $\text{vct}(D) \subseteq \mathcal{D}$

B 1) triviaal: $\mathcal{D}$ is de kleinste deelruimte en $\text{vct}(D)$ is ook een deelruimte die D omvat

2) $\text{vct}(D) = \sum_{i=1}^n \lambda_i d_i$

$\hookrightarrow d_i \in D \Rightarrow d_i \in \mathcal{D} \Rightarrow \lambda_i d_i \in \mathcal{D}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i d_i \in \mathcal{D}$

$\Rightarrow \text{vct}(D) \subseteq \mathcal{D}$

1. Definition (1.1.1)

Sei M ein Modul über einem Ring R .

Es gilt:

M ist ein R -Modul, wenn

$(M, +, \cdot)$ ein Modul ist.

(1.1.2)

Sei M ein Modul über einem Ring R .

Sei N ein Untermodul von M .

Sei L ein Untermodul von N .

Dann gilt: L ist ein Untermodul von M .

Sei M ein Modul über einem Ring R .

Sei N ein Untermodul von M .

Sei L ein Untermodul von N .

Dann gilt: L ist ein Untermodul von M .

Sei M ein Modul über einem Ring R .

Sei N ein Untermodul von M .

Sei L ein Untermodul von N .

Dann gilt: L ist ein Untermodul von M .

Sei M ein Modul über einem Ring R .

Sei N ein Untermodul von M .

Sei L ein Untermodul von N .

Dann gilt: L ist ein Untermodul von M .

Sei M ein Modul über einem Ring R .

Sei N ein Untermodul von M .

Sei L ein Untermodul von N .

Dann gilt: L ist ein Untermodul von M .

Sei M ein Modul über einem Ring R .

Sei N ein Untermodul von M .

Sei L ein Untermodul von N .

Dann gilt: L ist ein Untermodul von M .

Sei M ein Modul über einem Ring R .

Sei N ein Untermodul von M .

Sei L ein Untermodul von N .

Dann gilt: L ist ein Untermodul von M .

Sei M ein Modul über einem Ring R .

Sei N ein Untermodul von M .

Sei L ein Untermodul von N .

Dann gilt: L ist ein Untermodul von M .

Sei M ein Modul über einem Ring R .

Sei N ein Untermodul von M .

Sei L ein Untermodul von N .

Dann gilt: L ist ein Untermodul von M .

$$2) \text{vect}(D) = \bigcap_{U_i = \text{deelruimte van } V \text{ die } D \text{ omvat}} U_i = \bigcap_{U \subseteq V \text{ deelruimte DCU}} U$$

in woorden: $\text{vect}(D)$ is de kleinste van alle deelruimtes van V die D omvatten

Lemma Stel D kleinste deelruimte die D omvat

$$\text{TB } \bigcap_{U \subseteq V \text{ deelruimte DCU}} U = D \stackrel{\text{lemma}}{=} \text{vect}(D)$$

B. 2 inclusies

$$\text{I} \Rightarrow \text{triviaal: } D \subseteq \bigcap_{U \subseteq V \text{ deelruimte DCU}} U$$

$$\text{II} \Rightarrow \text{Stel } D \in D \Rightarrow D \in U \subseteq V \text{ deelruimte} \\ \Rightarrow D \subseteq U$$

opdracht 3.21: Zij $U_1, \dots, U_k$ deelruimten v.e. vectorruimte V . De somruimte is dan degeelyk een deelruimte want (TB) $U_1 + U_2 + \dots + U_k = \text{vect}(U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_k)$.

Lemma We bewijzen 2 inclusies

$$\text{I} \Rightarrow U_1 + \dots + U_k = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i \mid u_i \in U_i, i=1, \dots, k \right\}$$

$$\text{in } \text{vect}(U_1 \cup \dots \cup U_k) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, u_i \in U_i, u_i \in U_1 \cup \dots \cup U_k \right\}$$

met is duidelijk te zien dat $U_1 + \dots + U_k \subseteq \text{vect}(U_1 \cup \dots \cup U_k)$

$$\text{II} \Rightarrow u \in U_1 \cup \dots \cup U_k \text{ dus } u_i \in U_i \text{ voor zekere } i \in \{1, \dots, k\} \text{ of}$$

$$\text{dan ook } \lambda u \in U_i$$

$$\text{stel nu } v \in U_i \text{ met } v_i = \lambda_{i1} u_{i1} + \dots + \lambda_{in} u_{in} \text{ met } u_{ij} \in U_i$$

$$\text{aangezien } U_i \text{ deelruimte dus } \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} u_{ij} = \sum_{j=1}^n v_{ij} \in U_i + \dots + U_k$$

$$\text{I} \Rightarrow x \in U_1 + U_2$$

$$U_1 + U_2 = \left\{ u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2 \right\} \subseteq \text{vect}(U_1 \cup U_2)$$

$$\text{II} \Rightarrow x \in \text{vect}(U_1 \cup U_2)$$

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{R} \\ u_i \in U_1 \cup U_2 \end{array} \right.$$

$$= \underbrace{\sum_{u_i \in U_1} \lambda_i u_i}_{\in U_1} + \underbrace{\sum_{u_i \in U_2} \lambda_i u_i}_{\in U_2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \sum_{j=1}^m \lambda_{1j} u_{1j} \\ u_2 = \sum_{j=1}^m \lambda_{2j} u_{2j} \text{ en } u_{1j} \in U_1 \\ u_{2j} = \sum_{j=1}^m \lambda_{2j} u_{2j} \text{ en } u_{2j} \in U_2 \end{array} \right.$$

$$u_i = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} u_{ij} \text{ of } u_i \in U_2 \text{ en } u_{ij} \in U_1$$

$$\text{vect}(U_1 \cup U_2) \subseteq U_1 + U_2$$

propositie 3.28: Gegeven is een vectorruimte $(V, +)$

1) Zij U_1 en U_2 deelruimten van V . Dan geldt $W = U_1 \oplus U_2$ as

$$a) W = U_1 + U_2 \text{ en}$$

$$b) U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

Lemma we bewijzen 2 implicaties

$$\text{I} \Rightarrow \text{Stel } W = U_1 \oplus U_2, \text{ dan geldt voor willek } w \in W: \text{ dat er unieke vect } u_1 \in U_1 \text{ en } u_2 \in U_2 \text{ bestaan zo dat } w = u_1 + u_2.$$

Er geldt dus zeker dat $W = U_1 + U_2$.

Stel nu dat $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ dan is v te schrijven als

$$v = v + 0 = 0 + v \text{ met ook } v \in U_1 \text{ en } 0 \in U_2 \text{ en dan } 0 \in U_1, v \in U_2.$$

Dit is dan geen ~~sommige~~ unieke decompositie meer $\geq$ dus met de voorwaarde dat enkel $\{0\}$ zijn.

$\Leftarrow$ Stel nu dat $W = U_1 + U_2$ in $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

veronderstel nu ook dat $w \in W$ op meerdere wijzen te schrijven is als som vke vect uit U_1 en U_2 : $w = u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2$
 dan is $u_1 - u'_1 \in U_1$ en $u_2 - u'_2 \in U_2$ in $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ is $u_1 - u'_1 = u_2 - u'_2 = 0$
 dus $u_1 = u'_1$ en $u_2 = u'_2$.

2) Zij $U_1, \dots, U_k$ deelruimten van V . Dan is $W = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ ara

a) $w = u_1 + \dots + u_k$ in b) $\forall i = 1, \dots, k: u_i \in (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k)^\perp$

Wijz 2 implicaties

$\Rightarrow$ voor willek $w \in W$: $w = u_1 + \dots + u_k$ want directe som
 $\rightarrow W = U_1 + \dots + U_k$

analoog hierboven

propositie 3.27: Gegeven $(\mathbb{R}, V, +)$ en niet-lege deelverzameling.

D is vrg $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_0$, voor willek $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, voor willek, onderling
 versch vect $v_1, \dots, v_k \in D$: $(\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0)$

Wijz 2 implicatie via contrapunctie

$\Rightarrow$ ~~aanname~~ D is vrg

$\hookrightarrow A \Rightarrow B \times \neg B \Rightarrow \neg A$

stel nu comb van vect uit D levert nulvector op, maar waarin
 niet alle coëff λ 0 zijn

maar $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0$

$v_1, \dots, v_k \in D, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

stel nu $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 = -\frac{1}{\lambda_1} (\sum_{i=2}^k \lambda_i v_i)$

dan is D niet vrg

$\Leftarrow$ stel D niet vrg. dan $v \in D$: $v = \sum_{i=1}^k \mu_i v_i, v_i \in D, \mu_i \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow v = \sum_{i=1}^k 0 v_i = 0$

dit is een comb waar alvast coëff $v = 1 \neq 0$.

stelling 3.35: Lemma van Steinitz

zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een vektorruimte, dan geldt:

1. als $\{v_1, \dots, v_m\}$ een voortbrengend deel voor V bestaat met m elementen, dan is
 elke deelverzameling van V met meer dan m elem. lineair afhankelijk.

Wijz

zij $A = \{x_1, \dots, x_m\}$ een voortbrengend deel voor V . Neem een
 willekeurige deelverzameling $B = \{y_1, \dots, y_n\}$ van V met $n > m$.

Door het feit dat A voortbrengend is voor V , geldt dat elke vector y_i
 kan geschreven worden als lin comb v de vectoren van A .

voor iedere coëff $a_{ij} \in \mathbb{R}$ hebben we dus

$y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{m1}x_m$ in de onvoorwaarden q de vect van B in afh

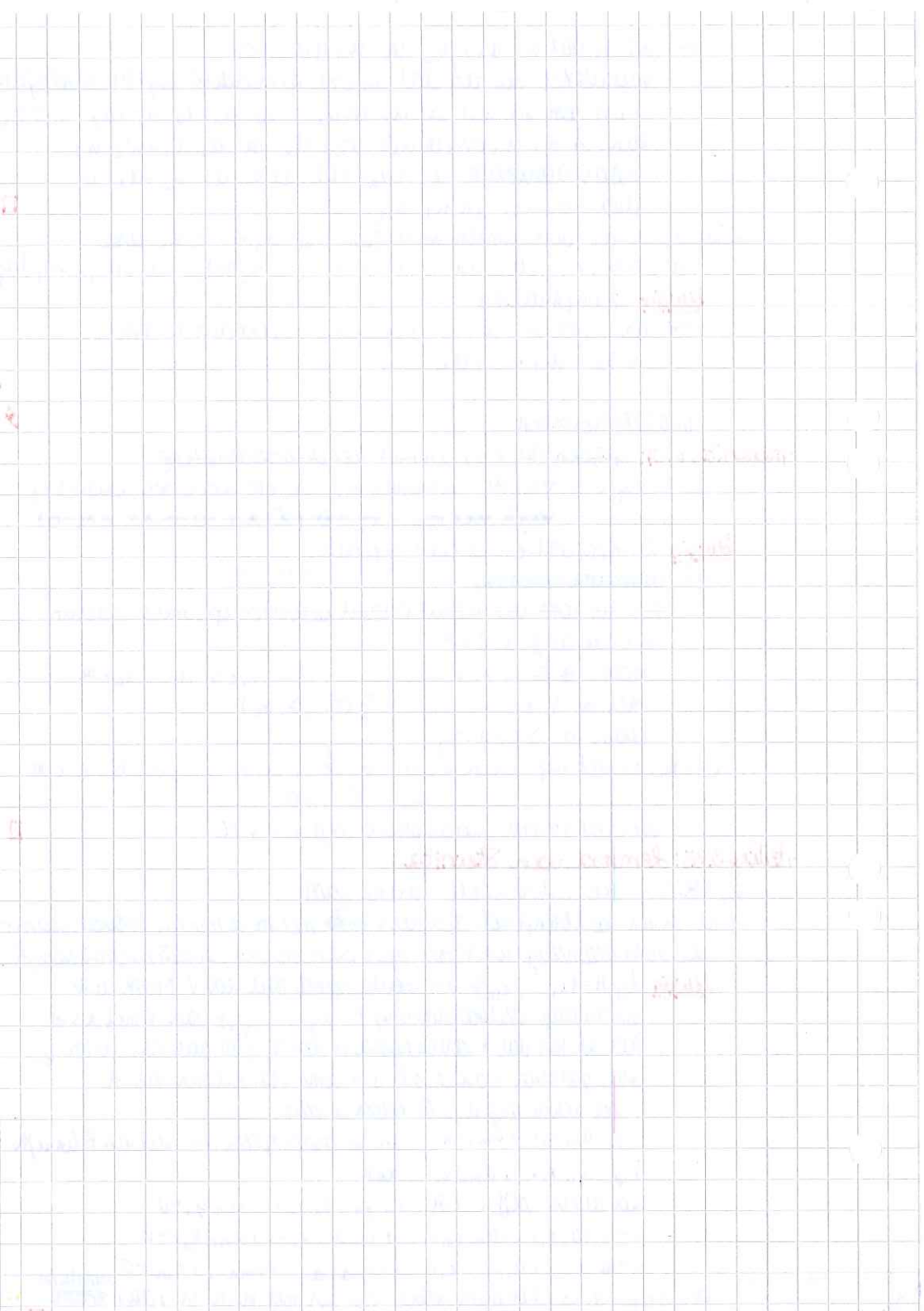
$y_2 = a_{12}x_1 + \dots + a_{m2}x_m$ zijn

voor iedere coëff $c_i \in \mathbb{R}$: $c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n = 0$

$\Leftrightarrow c_1(a_{11}x_1 + \dots + a_{m1}x_m) + \dots + c_n(a_{1n}x_1 + \dots + a_{mn}x_m) = 0$

$\Leftrightarrow (a_{11}c_1 + \dots + a_{1n}c_n)x_1 + \dots + (a_{m1}c_1 + \dots + a_{mn}c_n)x_m = 0$ minstens

dit is een $(m \times n)$ homogeen stelsel npr. wpl met $m < n$. U is dus $\neq \emptyset$



2. als er in V een vrij deel bestaat met n elementen, dan is elke deelverzameling van V met minder dan n elementen niet voortbrengend van V .

Lemma geg. V bestaat een vrij deel met n elementen in V , zeg A .
 Het is te bewijzen dat er een deelverzameling van V met minder dan n elementen die voortbrengend is, zeg B .

Omdat B voortbrengend is met minder dan n elementen, moet er een verzameling in V met n of meer elementen lineair afh. zijn. Het is duidelijk want A bevat n elementen. In n vrij deel bestaat er geen voortbrengend deel in V met minder dan n elementen. □

Propositie 3.37: Als $(R, V, +)$ een vekt. ruimte is, dan heeft elke basis van V met n vectoren, dan heeft elke andere basis van V ook n vectoren.

Bewijs Stel dat β_1 een basis van V met n vectoren is en β_2 ook basis van V . Omdat β_1 voortbr. is, moet het # el. van $\beta_2 \leq n$ zijn (prop. 3.37) dus is ook β_2 eindig.

in voortbr. deel n vrij deel, moet n men

omgekeerd moet $n \leq \#$ elementen van β_2 zijn

$$\Rightarrow \# \text{ el. } \beta_1 = n = \# \text{ el. } \beta_2$$

Propositie 3.40: Veronderstel dat $(R, V, +)$ een vekt. ruimte is van dimensie n . Dan geldt:

1) elke vrije verzameling v. V kan uitgebreid w. tot een basis van V

Bewijs Stel V eindig voortgebracht in $D = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ is vrij. Dan is oftewel

- D is voortbrengend $\Rightarrow D$ is een basis, moet nt uitgebreid w.

- D is niet " $\Rightarrow$ dan bestaat er een basis $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ dan $\exists v_{k+1} \notin \text{vect}(D)$ die verzameling $D \cup \{v_{k+1}\} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ is dan ook vrij.

$$\text{TB } \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \text{alle } \lambda_i = 0$$

$$\text{Als } \lambda_{k+1} \neq 0, \text{ dan } v_{k+1} = -\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1}} v_i$$

v_{k+1} is echter geen lin. comb. van $D \rightarrow$ tegenspraak

$$\text{dus } \lambda_{k+1} = 0 \text{ en } D \text{ was vrij dus } \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0 \quad \square$$

we herhalen dit proces tot er een basis van n vect. gevonden is, het proces stopt want het vrije deel ($\leq n$) uitgebreid is tot ook een voortbrengend deel. □

2) elke eindige voortbrengende verzameling van V kan (door schrappen van vectoren) gereduceerd w. tot een basis van V .

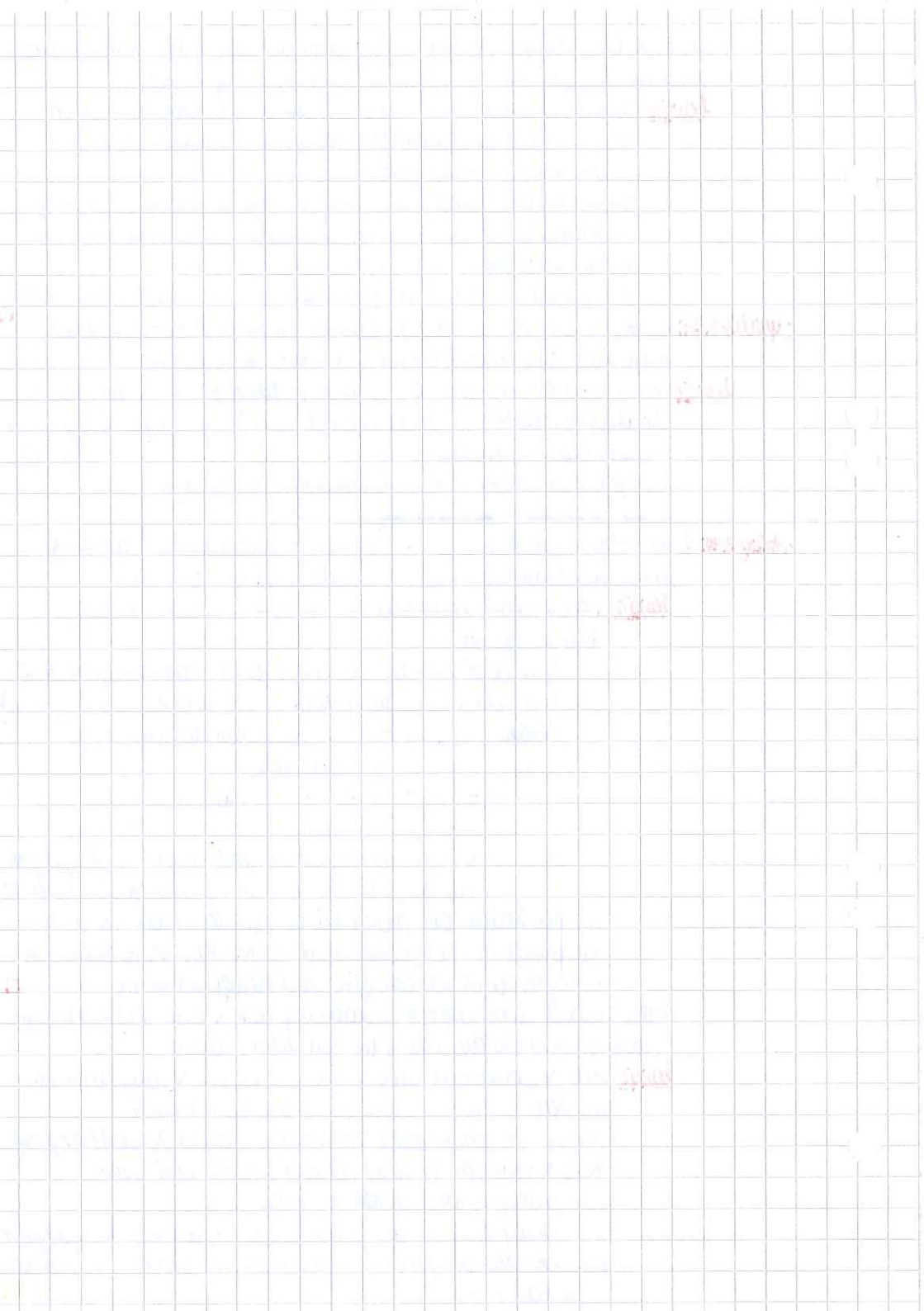
Bewijs Stel V voortgebracht door $S = \{w_1, \dots, w_m\} \subset V$, dan bewijzen we dat $\exists \{w_1, \dots, w_m\} \subset S$ een basis van V .

Alle $w_i = 0$ mogen elkaar gecomp. w. zonder de voortbrengendheid te verliezen. De basis zouden we als volgt vinden:

- uitsluit n of minder w_i vectoren in S

- schrap elke w_j die lineair afh. is van zijn voorgangers

we concluderen q deze verzameling, zeg $B \subset S$, is dan een basis is



- B is voortbrengend: elke vector in V is nu wel een lin. comb. van de vectoren uit S . pm constructie van B is nu ook elke w_i een lin. comb. van vect. in B
 w_i zit namelijk geweest in B of is geschnapt onder het een lin. comb. van de vorige vect. in

- B is rg: door de aard vd constructie gegarandeerd
 Het proces eindigt want B rg. in mkt m.s. 4 elementen. $\square$

• **stelling 3.45:** $\mathcal{K}g(\mathbb{R}, V, +)$ een vektorruimte en $\beta \subset V$, dan zijn volgende beweringen equivalent.

- 1) β is een basis van V
- 2) β is maximaal rg;
- 3) β is minimaal voortbrengend.

bewijs

1 $\Rightarrow$ 2) we veronderstellen dat β een basis van V dan is β zeker rg.
 we nemen nu een willek. $\beta' \subset V$ die β uitbreidt omdat $\beta \subseteq \beta'$ dus er is een element $w \in \beta'$ dat $w \notin \beta$. omdat β een basis is, is w dus te schrijven als lin. comb. van vect. uit β : $w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$ met $v_1, \dots, v_n \in \beta$ en $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$. w is dus te schrijven als lin. comb. van andere vectoren uit β' dus in β' niet rg. V maximaal rg $\beta' \Rightarrow \beta$ max. rg

2 $\Rightarrow$ 1) β is een maximaal rg deel van V . we willen aantonen dat β nu ook voortbrengend is voor V . Dus $\text{vect}(\beta) \supseteq V, \forall v \in V$

Nem. nu een willek. $v \in V$

als $v \in \beta$, dan is zeker $v \in \text{vect}(\beta)$

als $v \notin \beta$, dan is $\beta \cup \{v\}$ niet rg (β max. rg) dus bestaat er een lin. comb. niet-rg

$$\lambda v + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n = 0 \quad \text{met } w_1, \dots, w_n \in \beta \text{ en } \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

omdat β rg is, moet $\lambda \neq 0$ (anders $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n = 0$ niet minstens 1 $\lambda_i \neq 0$)

dus v is te schrijven als lin. comb. van $w_1, \dots, w_n$ en dus is $v \in \text{vect}(\beta)$.

dus is een willek. $v \in V$ ook $v \in \text{vect}(\beta)$ en is β voortbrengend (en rg) dus basis.

3 $\Rightarrow$ 2) β is een basis en dus voortbrengend.

we nemen nu een willek. deelverzameling $\beta' \subset \beta$. Er is dus minstens 1 vector die in β zit, maar niet in β' , zeg w . $w \in V$ is dus met te schrijven als lin. comb. van vect. in β' want β heeft enkel 1 lin. oneff. vect. (rg). We hebben dus een gr. voor $w = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$ met $w_1, \dots, w_n \in \beta$, maar geen gloosny. bestaat niet.

dus omdat $\exists w \in V$ dat $w \notin \text{vect}(\beta')$ in β' niet voortbrengend.

dit geldt voor elke keuze van β' dus is β min. voortbrengend.

3 $\Rightarrow$ 3) β is minimaal voortbrengend $\rightarrow$ aantonen B is rg.

Elke vect. $v \in V$ is te schrijven als lin. comb. van vect. uit β :

$$v = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n \quad \text{met } w_1, \dots, w_n \in \beta \text{ maar niet als een lin. comb. de}$$

triviale deelverzameling van β . β is voortbrengend en kan dus

uitgedund w. tot een basis, maar onder welke $\beta' \subset \beta$ is niet meer

voortbrengend en dus geen basis meer $\Rightarrow \beta$ is al een basis

• **Stelling 3.47:** Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een eindigdim vektorruimte en U een deelruimte van V . Dan geldt: 1) U is eindig voortgebracht en $\dim U \leq \dim V$

Bewijs Als $U = \{0\}$, is de bewering evident

Als $U \neq \{0\}$, nemen we $u_1 \neq 0$ en $u_1 \in U$. We kiezen telkens een vector u_i , lin. onafh. van $u_1, \dots, u_{i-1}$, tot we bereiken zo dat U uit tot een maximaal vrij deel van U . dit proces moeten we stoppen bij $u_1, \dots, u_k$ met $1 \leq k \leq \dim V$, want lin. onafh. vect. in U zijn ook l.o. in V . wegens stelling 3.46 is $u_1, \dots, u_k$ een basis van U en is $k = \dim U \leq \dim V$.

En dan geldt 2) $\dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V$

Bewijs we bewijzen 2 implicaties

$\Rightarrow$ $\dim U = \dim V \Rightarrow U = V$

de basis van U zijn $\dim U$ vrije vectoren. Deze vrije vectoren behoren (deelruimte) ook tot V en dus zijn er voor V ook $\dim U = \dim V$ vrije vectoren dus is de basis van U ook een basis van V en dus volgt $U = V$.

$\Leftarrow$ $U = V \Rightarrow \dim U = \dim V$

Als $U = V$, kan je een basis β opstellen die zowel basis is voor U als V (kan met andere) dus dan $\dim U = \dim V$ $\square$

• **Stelling 3.49:** Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een vektorruimte en veronderstel dat $\beta = e_1, \dots, e_n$ een basis van V . Dan kan elke vector v op een unieke manier geschreven worden als een lin. comb. van basisvectoren. Er ontstaat een bijectieve afb.: $\text{co}_\beta: V \rightarrow \mathbb{R}^n, v \mapsto \text{co}_\beta(v)$ die afbeeldt op het stel coëff. dat overeenkomt met v tov de basis β . at m de coörd. afbeelding lep door β .

Bewijs Omdat β voortbrengend is, in elke vector v van V te schrijven als een lin. comb.: $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ met $a_i \in \mathbb{R}, e_i \in \beta$. Stel dat dit op 2 manieren zou kunnen: $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$ (voor lin. bijcht. moet deze ontbinding namelijk uniek zijn)

Dan volgt dat $(a_1 - b_1)e_1 + \dots + (a_n - b_n)e_n = 0$

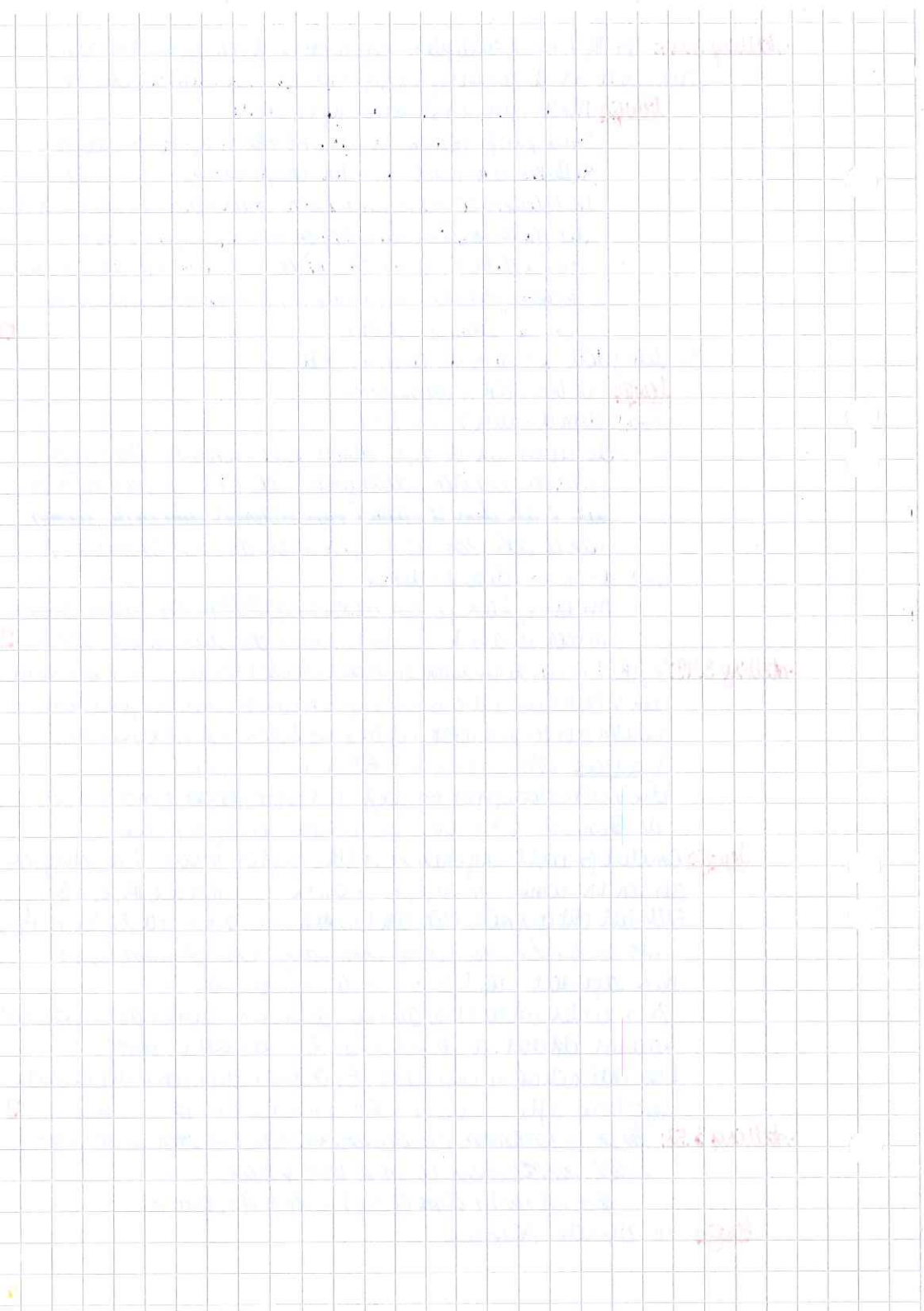
β is echter een basis en dus vrij (de vect. e_i vormen dus een vrij deel) waartuit volgt dat $a_i - b_i = 0 \Rightarrow a_i = b_i$ voor alle i . ~~Dit~~

Deze ontbinding is dus uniek. Er ontstaat dus een gedefinieerde bijectieve afb.: $\text{co}_\beta: V \rightarrow \mathbb{R}^n, v \mapsto \text{co}_\beta(v) = (a_1, \dots, a_n)$ $\square$

• **Stelling 3.53:** Als de vektorruimte V eindigdimensionaal is, dan geldt voor willek. deelruimten U en W van V dat

$$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$$

Bewijs zie volgende pagina



bewijs IB. $\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$

⊆ Zij $\dim U = r$, $\dim W = s$, $\dim(U \cap W) = t$

We weten: $U \cap W$ is deelruimte van U en van $W \Rightarrow t \leq r$ en $t \leq s$.

We nemen nu β basis voor $U \cap W$ en kunnen die nu eenvoudig uitbreiden tot basis β_U van U en anderszins tot basis β_W van W .

We willen aantonen dat $\beta_U \cup \beta_W$ basis is van $U+W$

Dus we hebben

- basis voor $U \cap W$: $\beta = \{v_1, \dots, v_t\}$

- basis voor U : $\beta_U = \{v_1, \dots, v_t, u_{t+1}, \dots, u_r\}$ ^{aanvullend met $u_{t+1}, \dots, u_r$ tot r vectoren}

- basis voor W : $\beta_W = \{v_1, \dots, v_t, w_{t+1}, \dots, w_s\}$ ^{aanvullend met $w_{t+1}, \dots, w_s$ tot s vectoren}

Aantonen $\beta_U \cup \beta_W = \{v_1, \dots, v_t, u_{t+1}, \dots, u_r, w_{t+1}, \dots, w_s\}$ is basis voor $U+W$

→ ~~is~~ β basis vect. rgn. rgn. v.g.:

$$\text{Neem willek. lin. comb.}: \sum_{i=1}^t \alpha_i v_i + \sum_{j=t+1}^r \beta_j u_j + \sum_{k=t+1}^s \gamma_k w_k = 0 \quad \alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in \mathbb{R}$$

We tonen aan dat $\alpha_i = \beta_j = \gamma_k = 0$ de enige opl. is

$$\text{we nemen de lin. comb. om: } \underbrace{\sum_{k=t+1}^s \gamma_k w_k}_{\in W} = - \underbrace{\sum_{i=1}^t \alpha_i v_i}_{\in U} - \underbrace{\sum_{j=t+1}^r \beta_j u_j}_{\in U}$$

$$\begin{aligned} &\in W \cap (U+W) \\ &\Rightarrow \in U \cap W \end{aligned}$$

omdat β basis $U \cap W$ kunnen we schrijven voor $\lambda_i \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=t+1}^s \gamma_k w_k = \sum_{i=1}^t \lambda_i v_i \Rightarrow \sum_{k=t+1}^s \gamma_k w_k - \sum_{i=1}^t \lambda_i v_i = 0$$

alle w_k en v_i vormen samen echter β_W een basis, dus in de enige oplossing $\gamma_k = \lambda_i = 0$

$$\gamma_k = 0 \text{ dus de originele combinatie is dan } \sum_{i=1}^t \alpha_i v_i + \sum_{j=t+1}^r \beta_j u_j = 0$$

met β_U basis van U dus alle $\alpha_i = \beta_j = 0$

alle coeff. rgn. dus 0 $\Rightarrow$ vect. L=0

→ Basis vect. rgn. voortvloeiend:

we weten van $U+W$ dat $U+W = \{u+w \mid u \in U \text{ en } w \in W\}$

we hebben een basis β_U en β_W dus kunnen we schrijven:

$$u = \sum_{i=1}^t \alpha_i v_i + \sum_{j=t+1}^r \beta_j u_j \quad w = \sum_{i=1}^t \lambda_i v_i + \sum_{k=t+1}^s \gamma_k w_k$$

$$\text{dus } U+W = \left\{ \sum_{i=1}^t (\alpha_i + \lambda_i) v_i + \sum_{j=t+1}^r \beta_j u_j + \sum_{k=t+1}^s \gamma_k w_k \mid \alpha_i, \lambda_i, \beta_j, \gamma_k \in \mathbb{R} \right\}$$

we nemen $\alpha_i = \lambda_i$

$$\text{dan } U+W = \left\{ \sum_{i=1}^t \alpha_i v_i + \sum_{j=t+1}^r \beta_j u_j + \sum_{k=t+1}^s \gamma_k w_k \mid \alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in \mathbb{R} \right\}$$

we zien nu dat $\beta_U \cup \beta_W = \{v_1, \dots, v_t, u_{t+1}, \dots, u_r, w_{t+1}, \dots, w_s\}$ $U+W$ voortbrengt

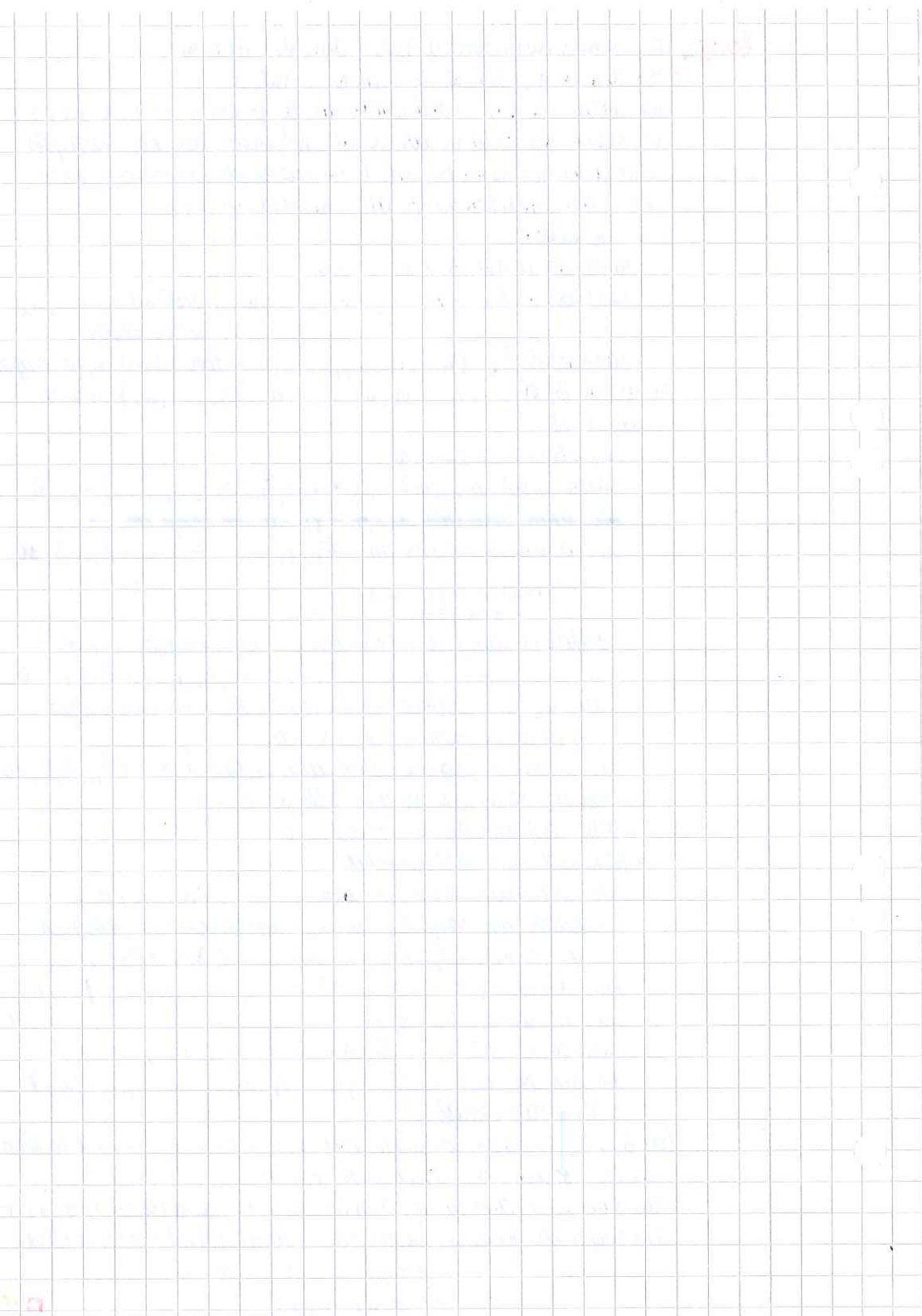
Dus $\beta_U \cup \beta_W$ is basis voor $U+W$ met $t+(r-t)+(s-t) = r+s-t$ vectoren in β_U : t vect., β_W : s vect. en β : t vect.

Dan $\dim U = r$, $\dim W = s$, $\dim(U \cap W) = t$, $\dim(U+W) = r+s-t$

Dan volgt de stelling: $\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$

$$\Rightarrow (r+s-t) + t = r+s$$

$$\Rightarrow r+s = r+s$$



Stelling 3.56: V eindigdim. vektorruimte en $U_1, \dots, U_k$ deelruimten van V zo dat $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$. Als $\forall i: \beta_i (\subset U_i)$ basis van U_i dan $\beta_1 \cup \dots \cup \beta_k = \bigcup_{i=1}^k \beta_i$ basis van V en dus $\dim V = \sum_{i=1}^k \dim U_i$

Bewijs: Per def van som van deelruimten is $U_{i=1}^k \beta_i$ een voortbrengend deel van V , want:

1) $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ en dus $\forall v \in V \exists u_1 + \dots + u_k$ dus $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k$ met $u_i \in U_i$

2) Elke u_i is te schrijven als lin. comb van vect van bijhorende basis β_i . We noteren de j -te vector van de i -te basis als $v_j^{(i)}$ en m_i het # vectoren vld i -te basis: $\beta_i = \{v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \dots, v_{m_i}^{(i)}\}$ voor $i=1, \dots, k$ dan $v = \sum_{j=1}^{m_1} \lambda_j^{(1)} v_j^{(1)} + \dots + \sum_{j=1}^{m_k} \lambda_j^{(k)} v_j^{(k)}$ met $v_j^{(i)} \in U_i, \lambda_j^{(i)} \in \mathbb{R}, \forall i, j$

3) herkennen:

$$v = \left\{ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j^{(i)} v_j^{(i)} \mid v_j^{(i)} \in U_i, \lambda_j^{(i)} \in \mathbb{R} \right\}$$

$\Rightarrow$ lin. comb van de vect in alle bases $\Rightarrow U_{i=1}^k \beta_i$ is voortbrengend

We bewijzen nu dat $U_{i=1}^k \beta_i$ ook vrij is, dus onafhankelijk we de oplossingen van $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j^{(i)} v_j^{(i)} = 0 \quad \forall \lambda_j^{(i)} \in \mathbb{R}$

Omdat V de directe som is van U_i , is de nulvector 0 slechts op één manier te schrijven als som van telkens element in $U_1, \dots, U_k$. Maar aangezien 0 ook kan worden te schrijven is als $0 = 0 + 0 + \dots + 0$ waarbij elke 0 in het $\mathbb{R}^n$ wordt gehouden als resp $U_1, \dots, U_k$.

We kunnen bedenken dat $\sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j^{(i)} v_j^{(i)} = 0$ voor elke $i=1, \dots, k$.

En omdat β_i een basis is voor U_i moeten dan alle $\lambda_j^{(i)} = 0$

Omdat Dit is de enige oplossing dus is $U_{i=1}^k \beta_i$ vrij.

Omdat $U_{i=1}^k \beta_i$ een complete basis is, volgt nu ook dat $\dim V = \sum_{i=1}^k \dim U_i$ □

Stelling 3.60: Als de vekt ruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ eindigdimensionaal is, dan heeft elke deelruimte van V een complementaire deelruimte.

Bewijs: Zij U een deelruimte van V . Neem een basis $\{u_1, \dots, u_k\}$ van U . Die kan uitgebreid w tot een basis $\{u_1, \dots, u_k, w_{k+1}, \dots, w_n\}$ van V en dan is $W = \text{span}\{w_{k+1}, \dots, w_n\}$ een complement. deelruimte van V .

Stelling 3.64: Veronderstel dat U de rijruimte van een willek. matrix A is, met $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dan geldt:

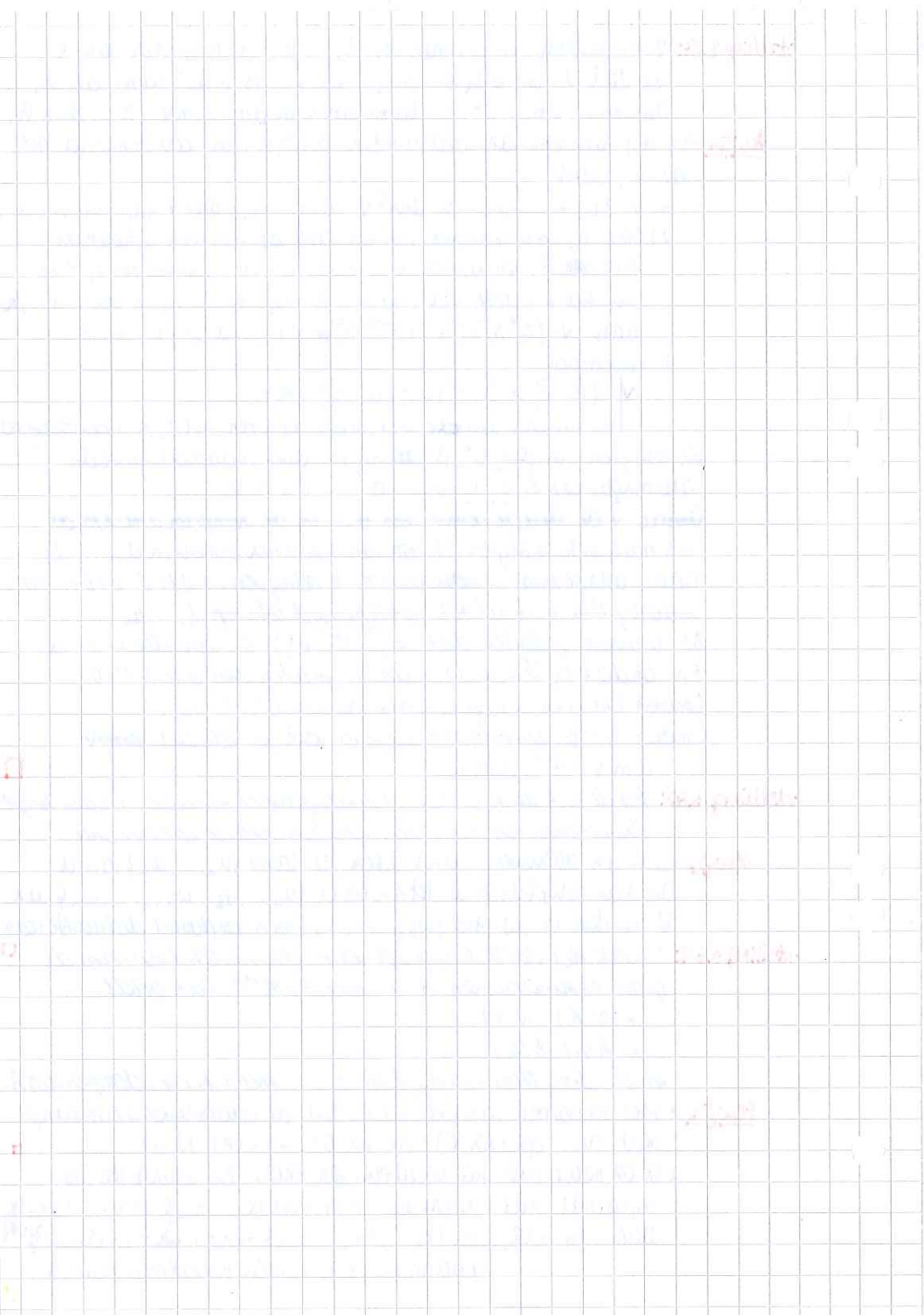
1. $N(A) = N(U)$

2. $R(A) = R(U)$

en ook $\dim_{\mathbb{R}} N(A) + \dim_{\mathbb{R}} R(A) = n$ met n het # kolommen van A .

Bewijs: 1. Het toepassen van ERO's verandert de oplossingsverzameling niet dus $\text{opl}(AX=0) = \text{opl}(UX=0) \Rightarrow N(A) = N(U)$ □

2. U ontstaat door het toepassen van ERO's. Die veranderen de rijruimte niet. Neem nu $R(A) = \text{span}\{x_1, \dots, x_m\} = \{ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \}$ dan $-R_i \rightarrow \lambda R_j$ vld $\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_m\} = \{ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_i x_i + \dots + \lambda_m x_m \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \}$ waarvan we $\lambda_i x_i$ kunnen herkennen naar x_i



- $R_i \leftrightarrow R_j$: de volgorde van vect in vct $x_1, \dots, x_m \notin \mathbb{R}^n$ veranderen

- $R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j$: vct $x_1, \dots, x_i + \lambda x_j, \dots, x_m$
 $= (1\lambda_1 x_1 + \dots + 1\lambda_i x_i + (\lambda_j + \lambda)x_j + \dots + \lambda_m x_m) \mid \lambda_i \in \mathbb{R}$
 hierdoor $\lambda_j = \lambda_j + \lambda \lambda_i$

Een ERO-toepassing verandert de xgriuwte dus niet $\Rightarrow R(A) = R(U)$ □

3. Nu geldt dat

- $\dim_{\mathbb{R}}(R(U)) = \#$ niet-nulrijen in $U = \#$ leidende eenen

- $\dim_{\mathbb{R}} N(U) = \#$ rijen van vth. stelsel $AX=0$

We weten dat het $\#$ gebonden van (= leidende eenen) plus $\#$ rijen van het totaal $\#$ var. is, n . $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(R(U)) + \dim_{\mathbb{R}}(N(U)) = n$ □

stelling 3.65: Voor matrices A, B waarbij AB bepaald is, geldt:

1. $N(AB) \supset N(B)$ (oplossing van $BX=0$) $\subset$ (oplossing van $(AB)X=0$)

2. $C(AB) \subset C(A)$

3. $R(AB) \subset R(B)$.

Bewijs: 1. aantonen: alle opt $Bx=0$ ook opt $AB \cdot x=0$

Dit is het geval: $(AB) \cdot x = A(Bx) = A(0) = 0 \Rightarrow N(B) \subset N(AB)$

2. aantonen: elke kolom in $C(AB)$ ook in $C(A)$ zit

We noteren B ijr zijn kolommen: $B = (b_1 \dots b_k)$, dan is

$AB = (Ab_1 \ Ab_2 \ \dots \ Ab_k)$ ($\rightarrow$ kolommen AB in vorm Ab_i)

Elke a_i $Ab_i = b_{i1}a_1 + b_{i2}a_2 + \dots + b_{in}a_n$ met a_i = i^{te} kolom A

hierbij elke Ab_i (kolom van AB) een lineair is van kolommen in A .

Dus elk element uit $C(AB)$ zit ook in $C(A) \Rightarrow C(AB) \subset C(A)$

3. puntje 2 verwoorden voor rijen: $R(AB) = C((AB)^T) = C(B^T A^T)$

en $C(B^T A^T) \subset C(B^T) = R(B)$ □

H4 - lineaire afbeeldingen en lineaire transformaties

Lemma 4.2: afb $L: V \rightarrow W$ tussen twee vekt. ruimten is een lin. afb.

$\Leftrightarrow L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall v_1, v_2 \in V$

Bewijs: we bewijzen 2 implicaties

$\Rightarrow$ L is een lin. afb en voldoet dus aan de 2 bewerkingen eig. uit de def. dus $L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = L(\lambda_1 v_1) + L(\lambda_2 v_2) = \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2)$

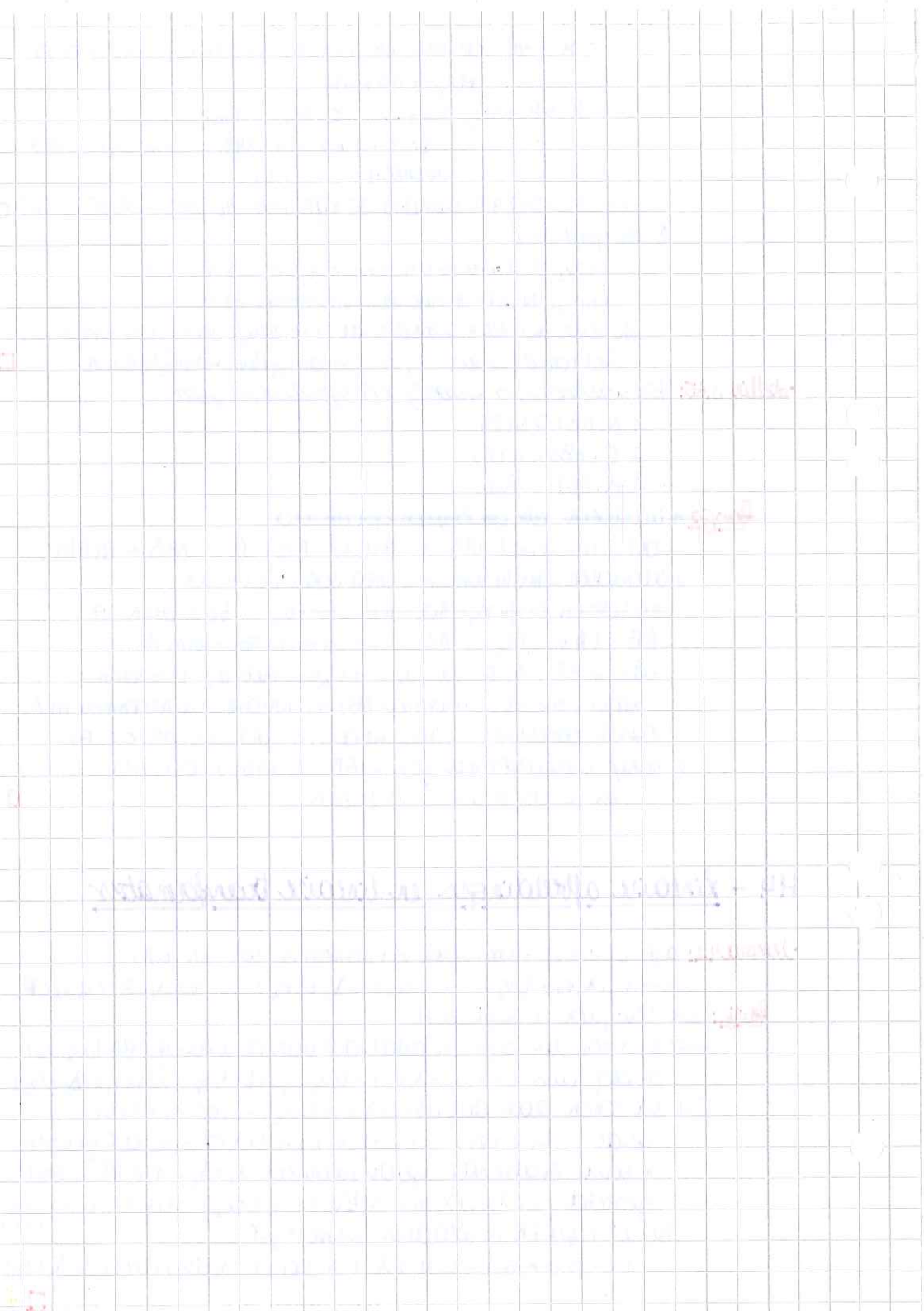
$\Leftarrow$ We tonen aan dat als $L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = L(v_1) \cdot \lambda_1 + \lambda_2 L(v_2)$

geldt, $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$ en $L(\lambda v_1) = \lambda L(v_1)$ ook gelden

De eerste eigenschap geldt wanneer $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 (\in \mathbb{R})$ wordt gesteld: $L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2) = 1 L(v_1) + 1 L(v_2) = L(v_1) + L(v_2)$

De 2^{de} eigensch. is voldaan, want $\lambda_2 = 0$:

$L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = L(v_1) \cdot \lambda_1 + \lambda_2 L(v_2) = \lambda_1 L(v_1) + 0 L(v_2) = \lambda_1 L(v_1)$ □



• **gevolg 4.3:** Als $L: V \rightarrow W$ een lin. aft. is, dan geldt:

1) $L(0) = 0$ en $L(-v) = -L(v)$ $\forall v \in V$

bewijs uit de lineariteit volgt: $L(0) = L(0+0) = L(0) + L(0) \Rightarrow L(0) = 0$
 dan volgt $\forall v \in V: L(v + (-v)) = L(0) = 0$
 maar ook $L(v + (-v)) = L(v) + L(-v)$
 $\Rightarrow L(-v) = -L(v)$

2) $L(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i L(v_i)$ $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \forall v_1, \dots, v_n \in V$

bewijs volgt uit de definitie

3) een lineaire aft. ligt volledig vast door de beelden vte basis

bewijs Zij $L: V \rightarrow W$ een lin. aft. en β een basis van V . Een willek. vekt $v \in V$ is te schrijven als lin. comb. van vekt $e_1, \dots, e_n \in \beta$ en zijn beeld is dan te schrijven als lin. comb. vte vekt $L(e_1), \dots, L(e_n)$ met dezelfde coëff.

• **propositie 4.3:** Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ vektorruimten

1) Als K en L lin. aft. van V naar W , dan is $K+L: V \rightarrow W: v \mapsto (K+L)(v) = K(v) + L(v)$ ook een lin. aft.

Analoog: $\forall \lambda \in \mathbb{R}: \lambda K: V \rightarrow W: v \mapsto (\lambda K)(v) = \lambda K(v)$ ook lin.

bewijs: we bekijken $(K+L)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$

$$\begin{aligned} \text{volgens def. } K+L: (K+L)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= K(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) + L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \\ \text{want } K \text{ en } L \text{ lin. aft.} \Rightarrow &= \lambda_1 K(v_1) + \lambda_2 K(v_2) + \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2) \\ &= \lambda_1 (K(v_1) + L(v_1)) + \lambda_2 (K(v_2) + L(v_2)) \\ &= \lambda_1 (K+L)(v_1) + \lambda_2 (K+L)(v_2) \end{aligned}$$

inderdaad $K+L$ lineair:

$$\begin{aligned} (\lambda K)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= \lambda K(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \\ &= \lambda \lambda_1 K(v_1) + \lambda \lambda_2 K(v_2) \\ &= \lambda_1 (\lambda K(v_1)) + \lambda_2 (\lambda K(v_2)) \\ &= \lambda_1 (\lambda K)(v_1) + \lambda_2 (\lambda K)(v_2) \end{aligned}$$

2) De verzameling van alle lin. aft. van V naar W wordt met deze optelling en scalaire vermenigvuldiging een reële vektorruimte.

bewijs ga axioma's vektorruimte na

ze volgen allemaal rechtstreeks uit het feit dat ze waar zijn voor vektorruimte W

• **stelling 4.14:** De samenstelling van 2 lineaire aft. is opnieuw een lin. aft.

bewijs Zij $K: U \rightarrow V$ en $L: V \rightarrow W$ lin. aft. tussen reële vekt. ruimten.

We moeten aantonen dat $L \circ K: U \rightarrow W$ ook lineair is

We bewijzen: $(L \circ K)(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 (L \circ K)(u_1) + \lambda_2 (L \circ K)(u_2)$ $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
 $\forall u_1, u_2 \in U$

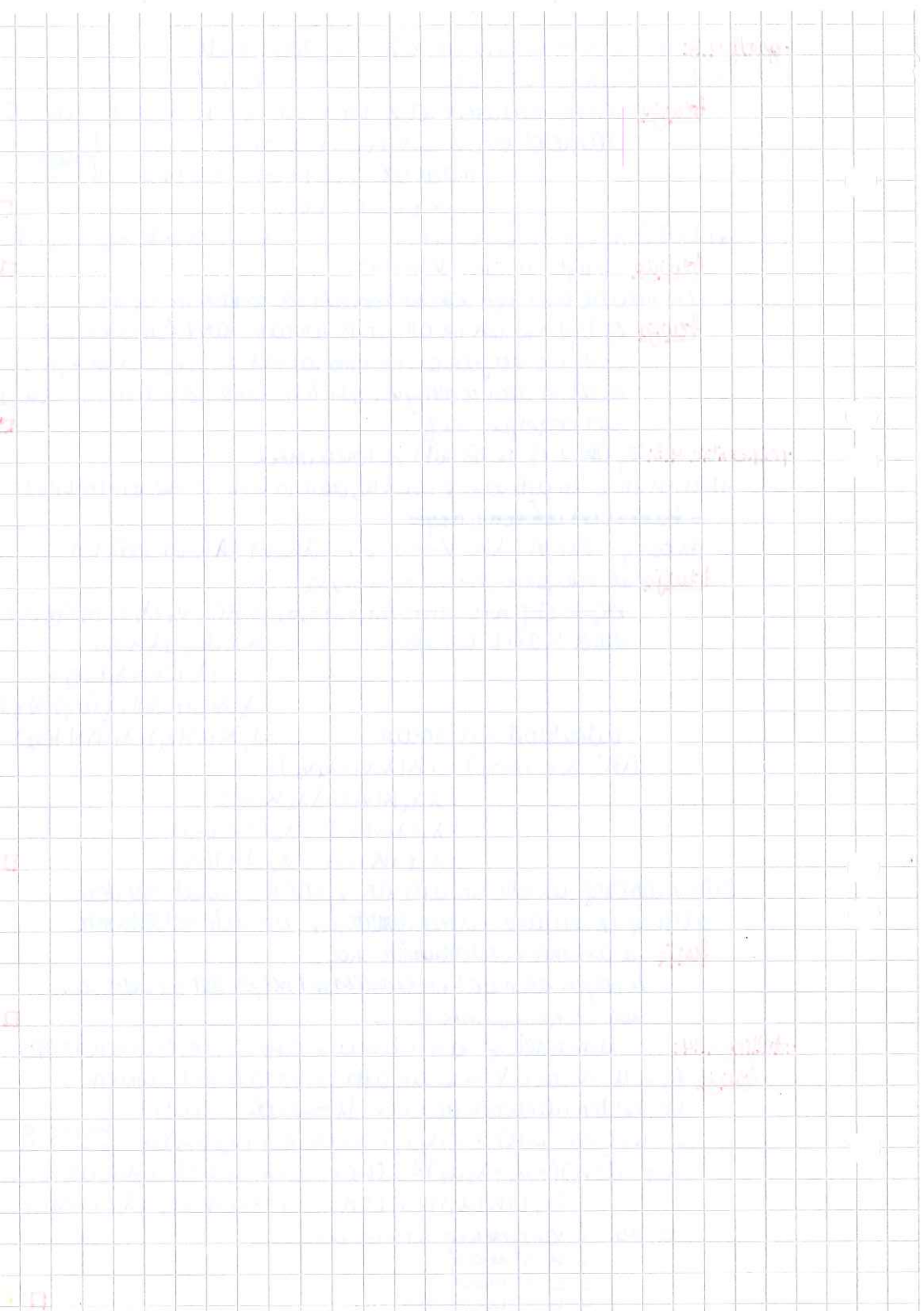
$$\begin{aligned} \text{Dus: } (L \circ K)(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) &\stackrel{?}{=} L(K(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)) \stackrel{?}{=} L(\lambda_1 K(u_1) + \lambda_2 K(u_2)) \\ &\stackrel{?}{=} \lambda_1 L(K(u_1)) + \lambda_2 L(K(u_2)) \stackrel{?}{=} \lambda_1 (L \circ K)(u_1) + \lambda_2 (L \circ K)(u_2) \end{aligned}$$

stappen: 1. samenstelling uitrekenen

2. K is lineair

3. L is lineair

4. $L \circ K$ toepassen



Stelling 4.18: Stel dat $L: V \rightarrow W$ een bijjectieve lin. afb. is van de vekt. ruimte $(R, V, +)$ naar de vekt. ruimte $(R, W, +)$. Dan is haar inverse afbeelding $K: W \rightarrow V$ ook een lin. afb.

Bewijs: K is lineair ook een bijjectie, we tonen nu aan dat K lineaire comb. bewaart (linear is).

Neem willek. elementen $w_1, w_2 \in W$ en $\lambda_1, \lambda_2 \in R$.

Beschouw $K(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)$. Omdat $L \circ K = \text{Id}_W$ volgt dat $w_n = L(K(w_n))$

$$L(K(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 L(K(w_1)) + \lambda_2 L(K(w_2))$$

In dus omdat L lineair is, geldt: $K(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 K(w_1) + \lambda_2 K(w_2)$

opdracht 4.19: eigensch. surjectief en injectief

1. Zij $L: V \rightarrow W$ een surjectieve lin. afb. en zij $\{v_1, \dots, v_n\}$ een voortbrengend deel van V , dan wordt W voortgebracht door $\{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$.

Bewijs: TB Stel $L: V \rightarrow W$ is surjectief

Dan vcht $\{v_1, \dots, v_n\} = V \Rightarrow \text{vct } \{L(v_1), \dots, L(v_n)\} = W$

B. Neem $w \in W$

Omdat L is surjectief $\Rightarrow \forall w \in W: \exists v \in V: L(v) = w$

In $V = \text{vct } \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow \forall v \in V: v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \quad \lambda_i \in R$

Dus $L(v) = L(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = w$

In omdat L lineair is: $L(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i L(v_i) = w$

Dus $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i L(v_i) \Rightarrow \{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$ is voortbrengend

2. Zij $L: V \rightarrow W$ een injectieve lin. afb. en zij $\{v_1, \dots, v_n\}$ vrij in V , dan is $\{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$ vrij in W .

Bewijs: met het onderijnde

Stel dat $\{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$ niet vrij, dan

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ niet alle 0 zodat $\sum_{i=1}^n \lambda_i L(v_i) = 0$

~~dan $\{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$ is niet vrij~~ L is lineair dus $\sum_{i=1}^n \lambda_i L(v_i) = L(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = 0$

Omdat L inj: $L(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$

In aangezien $\{v_1, \dots, v_n\}$ vrij $\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

$\Rightarrow \{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$ vrij

3. Zij $L: V \rightarrow W$ isomorfisme en $\{v_1, \dots, v_n\}$ basis van V , dan $\{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$ basis van W .

Bewijs: Stel $L: V \rightarrow W$ is een lin. bijjectie

TB $\{v_1, \dots, v_n\}$ een basis van $V \Leftrightarrow \{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$ basis van W

B $\Rightarrow$ bijjectie = vrij + injectie in basis = voortbrengend + vrij

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ basis $\Rightarrow \{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$ basis volgens 1) en 2)

$\Leftarrow L$ bijjectie $\Rightarrow L^{-1}$ ook een lin. bijjectie

idem invullen

Stelling 4.20: $\forall (R, V, +)$ en $(R, W, +)$ eindigdim. vekt. ruimten, dan geldt:

1) $V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$

Bewijs: zie volgende pag.

bewijs IB $V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$

B I $\Rightarrow$ Een isomorfisme bewaart de structuur en dus ook de basis: basis $\{v_1, \dots, v_n\} \in V \Rightarrow \{L(v_1), \dots, L(v_n)\} \in W$
 $\#$ basisvekt. is gelijk $\Rightarrow \dim V = \dim W$

B II Stel $\dim V = \dim W = n$. Kies een basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ in V en basis $\{w_1, \dots, w_n\}$ in W . Beschouw de lin. afb. $L: V \rightarrow W$ gedefinieerd door $L(v_i) = w_i$ ($i=1, \dots, n$) (lin. afb. wdl. bep. op de basisvektoren).
 we gaan na dat L een isomorfisme is.

1. weten dat L lineair is

2. kwijzen dat L bijectief is

L is inj $\Leftrightarrow L(a) = L(b) \Rightarrow a = b$

contrapositie: $a \neq b \Rightarrow L(a) \neq L(b)$

voor a welk vektor $a, b \in V$: $a = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$
 $a \neq b$ $b = \lambda'_1 v_1 + \dots + \lambda'_n v_n$

met minstens $1 \leq \lambda_i \neq \lambda'_i$

we weten $L(v_i) = w_i \Rightarrow L(a) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$

$L(b) = \lambda'_1 w_1 + \dots + \lambda'_n w_n$

voor $i: \lambda_i \neq \lambda'_i \Rightarrow L(a) \neq L(b) \Rightarrow$ injectief

L is surj $\Leftrightarrow (\forall b \in W: \exists a \in V: L(a) = b)$

voor $b \in W: b = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$

voor $a \in V: a = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

dan geldt: $L(a) = b$

$L(a) = L(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 L(v_1) + \dots + \lambda_n L(v_n)$
 $= \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n = b \Rightarrow$ surjectief

$\Rightarrow$ inj + surj = bijectief & lin $\Rightarrow$ isomorfisme

2) $V \cong \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dim V = n$

bewijs Neem in 1) $W = \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow V \cong \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dim V = \dim \mathbb{R}^n$ en $\dim \mathbb{R}^n = n$

$\Rightarrow V \cong \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dim V = n$

prop. 4.23: Zij $(V, +, \cdot)$ en $(W, +, \cdot)$ eindigdim vekt. ruimten met $\dim n$. Zij $L: V \rightarrow W$ een lin. afb. en $A = L_{\beta_W}^{\beta_V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de matrix v. L tov. gekozen basissen β_V en β_W , dan geldt:

1) L is isomorfisme $\Leftrightarrow A = L_{\beta_W}^{\beta_V}$ is inverteerbaar

2) bewijs L isomorfisme $\Rightarrow (L^{-1})_{\beta_W}^{\beta_V} = (L_{\beta_W}^{\beta_V})^{-1}$

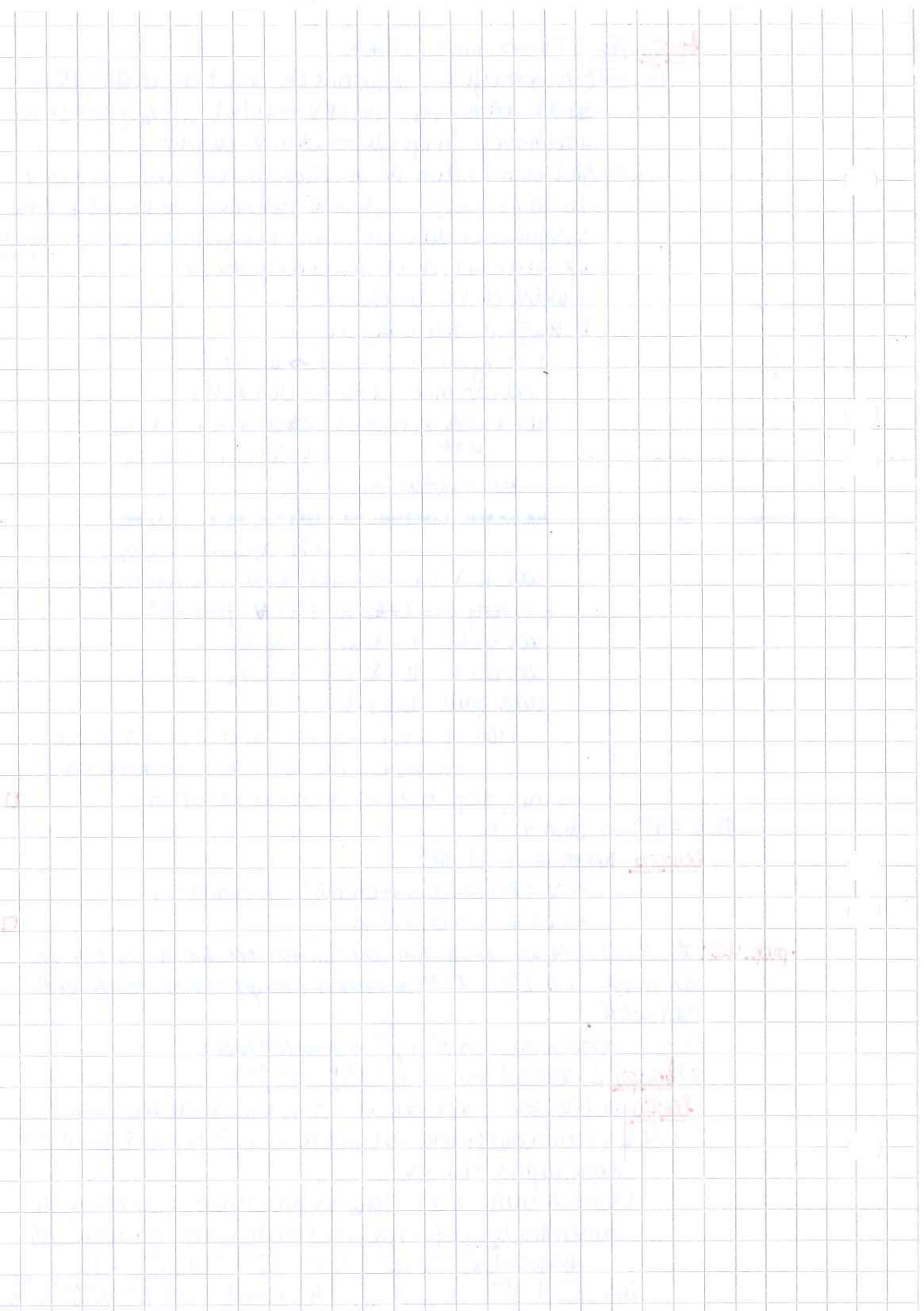
bewijs we bewijzen 2) impl. voor 1) 2) is terug te oek bewezen

$\Rightarrow L$ is een isomorfisme $\Rightarrow L$ is lin. en bijectief $\Rightarrow L$ heeft een inverse (afb.) $L^{-1}: W \rightarrow V$

We weten dan: $L \circ L^{-1} = \text{Id}_W$ en dat de matrix voorstelling v. L naar W samenstelling gelijk is aan het matrixprod. v. L en L^{-1} afb.:

$L_{\beta_W}^{\beta_W} \circ L_{\beta_W}^{\beta_V} (L^{-1})_{\beta_W}^{\beta_V} = (L \circ L^{-1})_{\beta_W}^{\beta_W} = (\text{Id}_W)_{\beta_W}^{\beta_W} = \text{Id}_n$

Dus $L_{\beta_W}^{\beta_V} (L^{-1})_{\beta_W}^{\beta_W} = \text{Id}_n \Rightarrow L_{\beta_W}^{\beta_V} = A$ is invert. met $A^{-1} = (L_{\beta_W}^{\beta_V})^{-1} = (L^{-1})_{\beta_W}^{\beta_V}$



$\boxed{\Leftarrow}$ $A = L_{\beta_W}^{\beta_V}$ is inverseerbaar dus bestaat er een inverse A^{-1} die we nu beschouwen als de matrix van lin. afb. $K: W \rightarrow V$ tov. basisen β_W en β_V .

Dan is $L \circ K = Id_W$ want $(L \circ K)_{\beta_W}^{\beta_W} = L_{\beta_V}^{\beta_W} \cdot K_{\beta_W}^{\beta_V} = (A \cdot A^{-1})_{\beta_W}^{\beta_W} = Id_W$
 analogoos $K \circ L = Id_V$

We weten nu dat L een isomorfisme is;

L is lineair (gegeven)

en L is bijectief want er bestaat een inverse afb. K zodat

$$L \circ K = Id_W \quad \text{en} \quad K \circ L = Id_V$$

L is dus lin. + bijectief = isomorfisme

propositie 4.32: Definitie 4.31 over de kern en het beeld impliceert dat $\ker(L)$ een deelruimte is van V en $\text{Im}(L)$ een deelruimte van W . Bijzonder nog is $\text{Im}(L)$ de deelruimte voortgevoerd door een basis van V .

bewijs: over deelruimte-eigenschappen

1) $\ker(L)$ is niet leeg, steeds $0 \in \ker(L)$

$$\forall x, y \in \ker(L), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \stackrel{0 \text{ (resp. 0)}}{=} 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in \ker(L)$$

2) $\text{Im}(L)$ niet leeg, steeds $L(0) = 0 \in \text{Im}(L)$

Nem x, y willek. $\in \text{Im}(L)$ en vindendel $x = L(v_1), y = L(v_2)$

$$\text{dan volgt } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \alpha x + \beta y = \alpha L(v_1) + \beta L(v_2) = L(\alpha v_1) + L(\beta v_2) = L(\alpha v_1 + \beta v_2) \in \text{Im}(L)$$

3) Zg β een basis van V . Elke vector v van V is dan te schrijven als een (unieke) lin. comb. $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ met $e_1, \dots, e_n \in \beta, x_i \in \mathbb{R}$.
 Voor het beeld geldt dan:

$$L(v) = x_1 L(e_1) + \dots + x_n L(e_n) \quad \text{voor elk beeld van een vector } v \in V$$

$$\text{en dus } \text{Im}(L) = \{ \sum x_i L(e_i) \mid x_i \in \mathbb{R} \}$$

stelling 4.34: Zg $L: V \rightarrow W$ en lin. afb. Aan geldt:

$$L \text{ is injectief} \Leftrightarrow \ker(L) = \{0\}$$

bewijs $\Rightarrow$ Als L injectief is en $v \in \ker(L)$, dan geldt dat

$$L(v) = 0 = L(0) \text{ en bijvuldige volgt dus } v = 0 \text{ (inj.)}$$

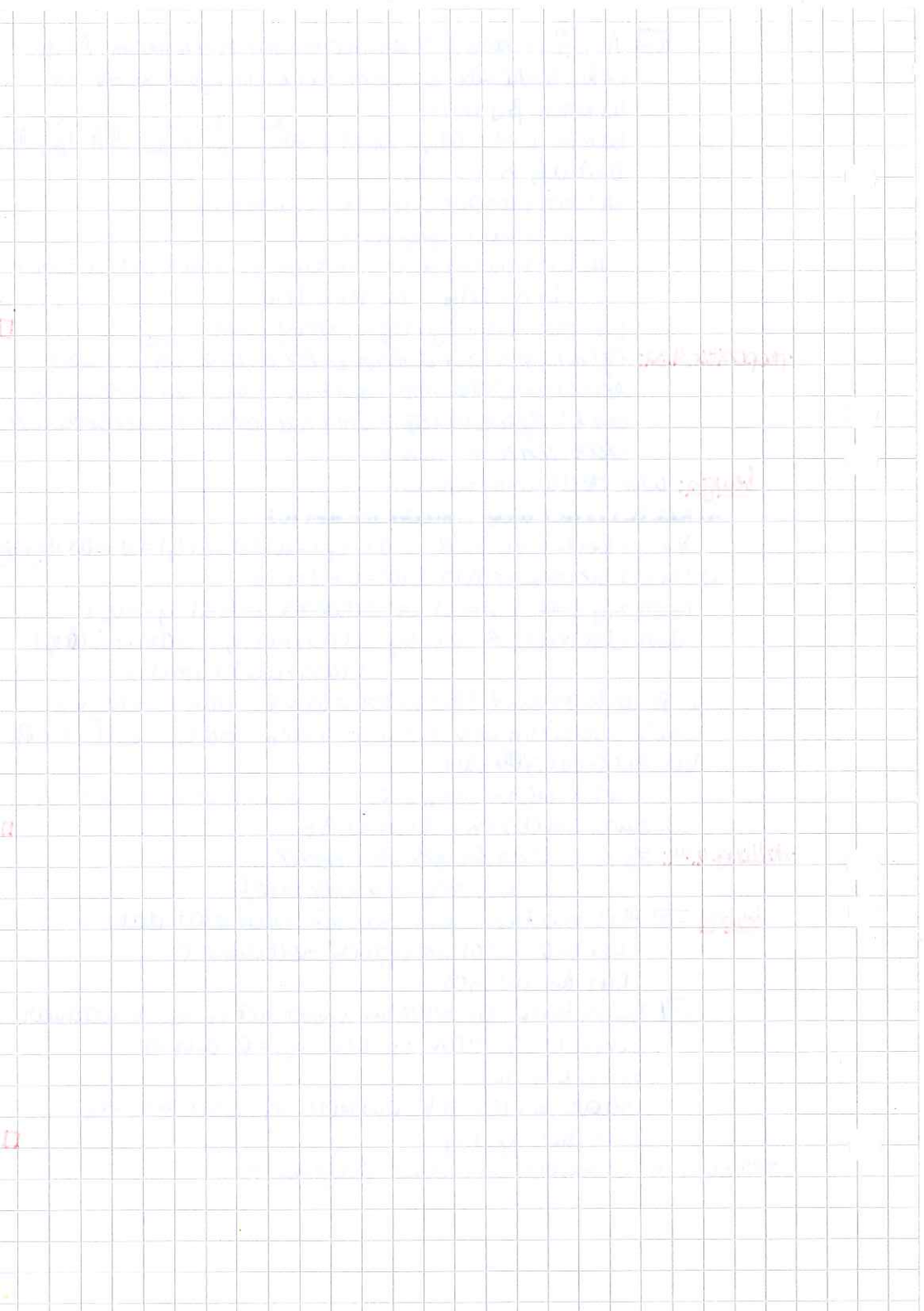
$$\text{Dus } \ker(L) = \{0\}$$

$\Leftarrow$ Nu is $\ker(L) = \{0\}$. Nem nu α willek. vect. $v_1, v_2 \in V$ waarvan $L(v_1) = L(v_2)$ dan is $L(v_1 - v_2) = 0$ dus is $v_1 - v_2 \in \ker(L)$.

$$\text{maar } \ker(L) = \{0\} \text{ dus volgt } v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$$

L is dus injectief

stelling 4.36 eenvoudig op nieuwe pagina's



stelling 4.36: Dimensiestelling voor lineaire afbeeldingen

Is $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ vectorruimten zijn, waarvan V eindigdim is, en als $L: V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding is, dan geldt dat

$$\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} (\ker L) + \dim_{\mathbb{R}} (\text{Im } L)$$

$$\dim(\ker L) \leq \dim(V)$$

bewijs $\ker(L)$ een deelruimte van V dus $\dim(\ker L)$ ook eindig
Kies een basis van de kern en vul die aan tot een basis van V : $\beta_V = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$
met $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ een basis van $\ker(L)$.

$$\begin{aligned} \text{We weten dat } \text{Im}(L) &= \text{vect} \{L(v_1), \dots, L(v_k), L(v_{k+1}), \dots, L(v_n)\} \\ &= \text{vect} \{L(v_1), \dots, L(v_k), 0, \dots, 0\} \\ &= \text{vect} \{L(v_1), \dots, L(v_k)\} \end{aligned}$$

$\begin{matrix} \{v_{k+1}, \dots, v_n\} \\ \in \ker(L) \\ \Rightarrow L(v_{k+1}) = \dots = L(v_n) = 0 \end{matrix}$

We maken nu bewezen dat $\{L(v_1), \dots, L(v_k)\}$ vrij is.

$$\text{Stel dat } \forall x_i \in \mathbb{R}: x_1 L(v_1) + \dots + x_k L(v_k) = 0$$

$$\Rightarrow L(x_1 v_1 + \dots + x_k v_k) = 0$$

Dit betekent dat $x_1 v_1 + \dots + x_k v_k \in \ker(L)$

$$\text{en dus } x_1 v_1 + \dots + x_k v_k = \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{R}$$

omdat $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ een basis vormt van V ,

$$\text{volgt hieruit dat } x_1 = x_2 = \dots = x_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$$

dus $\{v_1, \dots, v_k\}$ is een basis van $\text{Im}(L)$ (want voortbrengend en vrij).

$$\text{Dan is } \dim(\text{Im}(L)) = k$$

$$\dim(\ker(L)) = n - k$$

$$\dim(V) = n = n - k + k = \dim(\text{Im}(L)) + \dim(\ker(L)) \quad \square$$

quod 4.40: Als $L: V \rightarrow V: v \mapsto L(v)$ een lin. transform. is van eindigdim. vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$, dan geldt:

$$L \text{ is injectief} \Leftrightarrow L \text{ is surjectief} \Leftrightarrow L \text{ is bijectief}$$

bewijs 1 $\Rightarrow$ De injectiviteit van L impliceert dat $\ker_{\mathbb{R}}(L) = \{0\}$
dus $\dim_{\mathbb{R}}(\ker L) = 0$

$$\text{Wij de dimensiestelling volgt dan dat } \dim_{\mathbb{R}}(\text{Im } L) = \dim_{\mathbb{R}}(V)$$

Aangezien $\text{Im}(L)$ deelruimte van V ($L: V \rightarrow V$) volgt dan

$$\text{Im}(L) = V \text{ en dus is } L \text{ surjectief}$$

$\Leftarrow$ De surjectiviteit impliceert dat elke $v \in V$ in het beeld van V een vector heeft $v \in V$ zo dat $L(v) = v$

In een lin. afbeelding kan een vector geen verschil hebben

Dat en het feit dat $\text{Im}(L)$ deelruimte van V geeft dat $\text{Im}(L) = V$

$$\text{Dus } \dim(V) = \dim(\text{Im}(L)) \text{ dus moet } \dim(\ker(L)) = 0$$

volgens de dim. stelling en dus is $\ker(L) = \{0\}$ dus injectief.

Aangezien L zowel injectief als surjectief is, is ze ook bijectief. $\square$

$$\begin{aligned} v \in V &\Leftrightarrow v \in V \\ L(v) &= v \end{aligned}$$

Stelling 4.45: Zij $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dan zijn volgende beweringen equivalent;

- $\forall b \in \mathbb{R}^m$: stelsel $AX=b$ is oplosbaar
- $C(A) = \mathbb{R}^m$
- rang van $A = m$
- rijen van A zijn L.O.

Bewijs

a $\Rightarrow$ b Stel $x = (x_1 \dots x_n)^T$ en $A = (K_1 \dots K_n)$ met K_i kolommen v. A

Dan elke $K_i \in \mathbb{R}^m$

Dan is AX te zien als ~~lin comb~~ normaalv. kolommen van A

$$AX = x_1 K_1 + \dots + x_n K_n$$

Dus $\forall b \in \mathbb{R}^m: \exists x_i \in \mathbb{R}: b = x_1 K_1 + \dots + x_n K_n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow b \in \mathbb{R}^m &= \{x_1 K_1 + \dots + x_n K_n \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{vct } \{K_1, \dots, K_n\} \\ &= C(A) \end{aligned}$$

$$b \Rightarrow c \quad C(A) = \mathbb{R}^m \Rightarrow \dim(C(A)) = \dim(\mathbb{R}^m) = m$$

c $\Rightarrow$ d de rang en dus ook de rijrang van A is m .
 Algoritmen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zullen er dus na rijreductie geen ~~rijen~~ ^{nulrijen} ~~variabelen~~ zijn ontstaan, en dus zijn de rijen L.O.

d $\Rightarrow$ a Wanneer de rijen van A L.O. zijn, wilt dit zeggen dat geen enkele rij een lin. comb. is van $n-1$ andere rijen. Er zal geen rij 0 en dus geen mogelijkheid tot een rij 0 stelsel kunnen ontstaan. □

Stelling 4.46: Zij $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dan zijn volgende beweringen equivalent;

- $\forall b \in \mathbb{R}^m$: $AX=b$ heeft hoogstens 1 oplossing
- $N(A) = \{0\}$
- rang van $A = n$
- de kolommen van A zijn L.O.

Bewijs

a $\Rightarrow$ b Leugn uit contradictie: Stel dat de nulruimte nog een vektor $v \in N(A)$, $v \neq 0$ bevat zodat $A \cdot v = 0$ en stel x als oplossing van $AX=b$, dan ~~heeft~~ is $x+v$ ook een oplossing:

$$A(x_1 + v) = 0 = b + 0 = b.$$

Om hoogstens 1 oplossing te hebben moet $N(A) = \{0\}$

b $\Rightarrow$ c dimensiestelling: #kolommen $A = \dim(N(A)) + \text{rijrang } A$
 en $\dim(N(A)) = 0 \Rightarrow \text{rijrang } A = \text{rang } A = \# \text{kolommen} = n$

c $\Rightarrow$ d rang van $A = \text{kolomrang } A = n = \# \text{kolommen van } A$
 als kolomrang = #kolommen, dan zijn de kolommen L.O.

d $\Rightarrow$ a kolommen van A L.O. $\Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ is inverteerbaar
 als A invert, dan heeft $AX=b$ ofwel juist 1 ofwel geen oplossingen. □

$\dim(N(A)) = 0$
 $\Rightarrow$ enkel of nuloplossing

Stelling 4.47: Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dan zijn de volgende beweringen equivalent:

- a) A is inverteerbaar
- b) $\det(A) \neq 0$
- c) rang van $A = n$
- d) rijen zijn L.O.
- e) kolommen van A zijn L.O.

bewijs

a $\Rightarrow$ b eigenschap inverse matrix

b $\Rightarrow$ c wanneer $\det(A) \neq 0$ zijn er geen nulrijen i.d. gereduceerde matrix en is de rijrang gelijk aan het #rijen
rang $A =$ rijrang $A = n$

c $\Rightarrow$ d de rang blijft gelijk als we de matrix reduceren na reduceren zijn er nog altijd n rijen $\neq$ nulrij
alle rijen zijn dan L.O.

d $\Rightarrow$ e rijen L.O. $\Rightarrow$ rang = #rijen = #kolommen
 $\Rightarrow$ kunnen geen enkele rij schrappen (basis maken)
 $\Rightarrow$ allemaal L.O.

e $\Rightarrow$ a a hr contradictie: want de kolommen L.A. zouden zijn, is in een niet-triviale lin. comb. die 0 als opt. heeft.
Dan zou de vermenigvuldiging met A twee verschillende vectoren naar 0 sturen. Dus kan A niet invert. zijn
 $\Rightarrow$ kolommen L.O. $\Rightarrow A$ invert □

Stelling 4.48: Oplosbaarheid van een lineair probleem

voor volledige stelling: zie samenvatting

hebt: $L: (\mathbb{R}, V, +) \rightarrow (\mathbb{R}, W, +)$ bepaalt het lin. probleem ' $L(x) = w_0$ '
het oplosbaar met x_p een oplossing, dan is de opt. verz.:
 $x_p + \ker(L) = \{x_p + x_h \mid x_h \in \ker(L)\}$

$\Rightarrow$ Paul, opt

dan is de opt. verz.: $x_p + \ker(L)$

aanname
 x_p is opt. opt
+ oplosbaar

bewijs TB de opt. verz. is juist $x_p + \ker(L)$ $\rightarrow$ a hr a inclusies

1. gegeven verz $\subseteq$ alle opt.

Neem willek. vect van de vorm $x_p + x_h$ ($x_h \in \ker(L)$)

Dit is ook een opt, want $L(x_p + x_h) = L(x_p) + L(x_h) = w_0 + 0 = w_0$

2. alle opt $\subseteq$ gegeven verz

Neem een willek. x oplossing uit probleem ($L(x) = w_0$)

Dus kunnen we x schrijven als: $x = x_p + (x - x_p)$

Omdat $L(x - x_p) = L(x) - L(x_p) = w_0 - w_0 = 0$, geldt dat

$(x - x_p)$ tot de kern van L behoort.

x heeft dus de vorm $x_p + x_h$, $x_h \in \ker(L)$

alle op behoren dus tot de geg. verzamelp

2 inclusies bewezen $\Rightarrow$ opt. verz. = geg. verz. □

4.5 - Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonaliseerbaarheid

- **Stelling 5.1:** Een vierkante matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is diagonaliseerbaar als $\mathbb{R}^n$ een basis heeft die voll. uit eigenvect. van A bestaat.

Wijze we bewijzen 2 implicaties

$\Rightarrow$ A is diagonaliseerbaar dus gelijkvormig met een diag. matrix Λ : $P^{-1}AP = \Lambda$

P is alleen invert. als de kolommen L.O. zijn. Dus kolommen $(p_1 \dots p_n)$ zijn L.O. in $\mathbb{R}^n$ dus vormen ze een basis β voor $\mathbb{R}^n$ (vrij + $\dim(\mathbb{R}^n) = n$). Deze kolommen p_i worden juist overeen met de eigenvect. van A ! ($Ap_i = \lambda p_i$ (met $p_i = v_i$))

$\Leftarrow$ Stel β een basis van eigenvect. van A in de standaardbasis van $\mathbb{R}^n$, dan is $(L_A)_{\beta}^{\alpha} = A$
in $(L_A)_{\beta}^{\beta} = \text{diagonaal matrix } D$ met op de diagon.

alle eigenwaarden i/d volgende β en de volgende v. eigenvect. v/d basis β

En we weten dat $D = P^{-1}AP$ met $P = (\text{Id})_{\beta}^{\alpha}$ maar A is gelijkvormig met een diag. matrix $\Rightarrow A$ is diagonaliseerbaar

- **Stelling 5.9:** Gelijkvormige matrices hebben dezelfde karakteristieke veelterm, dezelfde determinant en hetzelfde spoor.

Wijze 1) Veronderstel dat A en B gelijkvormig zijn ($A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

Er is een invert. matrix P d.o. dat: $B = P^{-1}AP$

$$\begin{aligned} \text{Dan geldt: } \varphi_B(x) &= \det(xI_n - B) = \det(xI_n - P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}xI_nP - P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}(xI_n - A)P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(xI_n - A) \det(P) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xI_n - P^{-1}AP &= P^{-1}(xI_n - A)P \\ &= P^{-1}xI_nP - P^{-1}AP \\ &= P^{-1}xI_nP - P^{-1}AP \\ &= xI_n \end{aligned}$$

$$= \det(P^{-1}) \det(xI_n - A) \det(P) \quad \det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}$$

$$= \varphi_A(x)$$

$$2) \det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) = \det(A)$$

$$3) \text{ we weten } \text{Tr}(D \cdot C) = \text{Tr}(C \cdot D) \quad \forall D, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\text{we vinden } \text{Tr}(B) = \text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(P^{-1}PA) = \text{Tr}(I_n A) = \text{Tr}(A)$$

- **Stelling 5.16:** Veronderstel dat $L: V \rightarrow V$ een lin. transf. v/d eindigdim. vektorruimte $(\mathbb{R}_V, +)$, met $\text{spoor}(L) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Dan geldt, $\forall \lambda_i$:

$$1) m(\lambda_i) \geq 1$$

$$2) d(\lambda_i) \geq 1$$

$$3) d(\lambda_i) \leq m(\lambda_i)$$

Wijze 1) $m(\lambda_i) \geq 1$, want stel $m(\lambda_i) = 0$ dan zou λ_i geen nulpunt o/bt. van φ_L en dus geen eigenwaarde zijn

2) $d(\lambda_i) \geq 1$, want stel $d(\lambda_i) = 0$ dan zijn er (behalve 0) geen mlt. eigenvect. die bij λ_i horen $\rightarrow \lambda_i$ geen eigenwaarde (0 $\neq$ eigenwaarde)

3) zie volgende pag.

3) TB $d(\lambda_i) \leq m(\lambda_i)$

B Stel dat $\dim E_\lambda = d(\lambda) = d$, dan bestaat er dus een basis met d elementen voor $E_\lambda : v_1, \dots, v_d$

Deze basis (vrij) kan we uitbreiden tot basis β van V , want E_λ deelt ruimte V . Dus dan $\beta = v_1, \dots, v_d, v_{d+1}, \dots, v_n$

T.O.V β is de matrixaafb. van L aan:

$$L_\beta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_d & * \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_d & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

(n-d)x(n-d) d x d d x (n-d)
(n-d)x d (n-d)x(n-d)

$v_1, \dots, v_d$ zijn eigenvect van L bij eigenwaarde λ , dus geldt voor elke i : $L(v_i) = \lambda v_i$

Wt voor v_1 : v_1 is afgebeeld op coördinaat $(\lambda, 0, \dots, 0, *, \dots, *)$

d'angezet in vect $v = \lambda v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_d \Rightarrow L(v) = \lambda v_1 + \dots$

dus geldt $\forall i$

Wt zoeken nu $\varphi_L(x) = \det(xI_n - L_\beta^A) = \det \begin{pmatrix} (x-\lambda)I_d & -B \\ 0 & xI_{n-d} - A \end{pmatrix}$

Wt ontwikkelen we kolom 1
door de minor $xI_{n-d} - A$
en so doort we steeds
hebben gehad
(d'angezet telkens naar 1 element $x-\lambda$
de rest worden nullen overblijven)

$$= (x-\lambda)^d \det(xI_{n-d} - A)$$

$$= (x-\lambda)^d \varphi_A(x)$$

We zien nu dat $m(\lambda)$ minstens gelijk is aan $d = d(\lambda)$, dit kan meer zijn want λ een nulpunt is van $\varphi_A(x)$.

dus $m(\lambda) \geq d(\lambda)$. □

Stelling 5.18: Veronderstel dat $L: V \rightarrow V$ een lin. transf. van de eindigdim. vect. ruimte $(K, V, +)$, en veronderstel dat $\text{Spec}(L) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ onderling verschillend, telkens met bijhorende eigenvect $v_1, \dots, v_k$. Dan is $v_1, \dots, v_k \in L.O.$

bewijs per inductie

als $k=1$, dan is $v_1 \in L.O.$ vermits $v_1 \neq 0$.

inductietap: stel dat hervolstaat geldt voor $k-1$ eigenwaarden en $k-1$ eigenvectoren. Dan is $v_1, \dots, v_{k-1} \in L.O.$

contradictie: stel nu $v_1, \dots, v_k \notin L.O.$

Dan is $v_k \in \text{Vect } v_1, \dots, v_{k-1}$ dus $v_k = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{k-1} v_{k-1}$ $\mu_i \in K$
dan geldt enerzijds:

$$L(v_k) = L(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_{k-1} v_{k-1}) = \mu_1 L(v_1) + \dots + \mu_{k-1} L(v_{k-1})$$

$$= \mu_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \mu_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1}$$

en anderzijds:

$$L(v_k) = \lambda_k v_k = \lambda_k (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_{k-1} v_{k-1})$$

dus $\mu_1 (\lambda_k - \lambda_1) v_1 + \dots + \mu_{k-1} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) v_{k-1} = 0$
 maar $v_1, \dots, v_{k-1} \in L.O.$ dus en alle λ_i zijn verschillend
 dus moet $\mu_i = 0$ (contradictie v_k eigenvect $\Rightarrow v_k \in L.O.$) □

• **gerd. 5.20:** Een lin. transf. met enkelvoudig spectrum is diagonaliseerbaar.

bewijs Stel $L: V \rightarrow V$ met $\dim V = n$

Als $\text{Spec}(L)$ enkelvoudig, dan heeft L n eigenwaarden elk met ^{eigen} multipliciteit 1, dus heeft elke eigenwaarde juist 1 bijhorende eigenvector. Deverz. van alle deze eig. vect. is dan l.o. en bestaat uit n elementen. Deze verz. is dus vrij met $\# \text{ elementen} = \dim V \Rightarrow$ is een basis voor V !

Er bestaat dus een basis voor V veld uit eigenvectoren van $L \Rightarrow$ diagonaliseerbaar. □

• **lemma 5.22:** Indien een lin. transf. L van een eindigdim. vektorruimte $(V, \mathcal{B})$ diagonaliseerbaar is, dan moet de karakteristieke veelterm van L voll. ontbinden als product van 1'gr. factoren

bewijs Als L diagonaliseerbaar is, kunnen we een basis $\mathcal{B}$ van V kiezen zodat $L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ een diagonaal matrix is. (basis met alle eigenvectoren)

Als we φ_L uittrekken, dan ontbindt die weltev. als product van eenregraadsfactoren:

$$\varphi_L(X) = \det(XI_n - L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) = \begin{vmatrix} X - \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X - \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X - \lambda_n \end{vmatrix} = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_n)$$

• **stelling 5.23:** Zij $(V, \mathcal{B})$ een vektorruimte met $\dim V = n$ en zij L een lin. transf. van V , waarvan φ_L voll. ontbindt (over $\mathbb{R}$) als product v. 1'gr. factoren. Stel $\text{Spec}(L) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.
Dan is L diagonaliseerbaar $\Leftrightarrow \forall \lambda_i: d(\lambda_i) = m(\lambda_i)$

bewijs 2 implicaties

$\Rightarrow$ L diagon. dus V een basis $\mathcal{B}$ van eig. vect. van L . Schrijf de vect. van $\mathcal{B}$ zo dat ze geordend zijn per overeenkomstige eigenwaarde: de eerste m_1 vect. corresponderen met λ_1 , de volgende m_2 met λ_2 enz. Het bestaat de diagon. matrix op te stellen van L tov $\mathcal{B}$ om te zien dan $d(\lambda_i) = m(\lambda_i) = m_i \quad \forall \lambda_i$

- $m(\lambda_i) = m_i$: L is diagon. dus $L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ is een diagonaal matrix waarbij elke λ_i juist m_i keer voorkomt
dus als ik φ_L uittrekken, krijg ik juist m_i keer $(X - \lambda_i)$
dus $m(\lambda_i) = m_i \quad \forall \lambda_i$

- $d(\lambda_i) = m_i$: L is diagon. dus $\exists$ basis voor V bestaande uit eig. vect. van L . Deze verzameling is l.o. en elke deelverz. E_{λ_i} van E_{λ_i} is de bijhorende verz. van m_i eig. vect. l.o. Elk van deze verz. is nu ook voortbrengend voor bijhorende eigenruimte (anders niet diagon.).
dus deze verz. met m_i eigenvect. vormen elk een basis voor hun bijhorende E_{λ_i} .
dus $\dim E_{\lambda_i} = m_i = d(\lambda_i)$

Dan $m(\lambda_i) = d(\lambda_i)$

≡ Stel nu dat voor elke eigenwaarde λ_i : $d(\lambda_i) = m(\lambda_i) = m_i$
 merk op dat $m_1 + \dots + m_k = n$ omdat φ_L volledig ontbindt als prod.
 van 1-graadsfactoren.
 We kiezen nu lamin:

$v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,m_1}$ voor E_{λ_1}

$v_{2,1}, v_{2,2}, \dots, v_{2,m_2}$ voor E_{λ_2}

$\dots$
 $v_{k,1}, v_{k,2}, \dots, v_{k,m_k}$ voor E_{λ_k}

dan vormt β een verzameling van n elementen

$$\beta = \{v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,m_1}, v_{2,1}, v_{2,2}, \dots, v_{2,m_2}, \dots, v_{k,1}, \dots, v_{k,m_k}\}$$

we tonen aan dat β vrij is:

Met dat een lin. comb. van β de nulvector oplevert: $\forall x_{ij} \in \mathbb{R}$

$$x_{1,1}v_{1,1} + \dots + x_{1,m_1}v_{1,m_1} + x_{2,1}v_{2,1} + \dots + x_{2,m_2}v_{2,m_2} + \dots + x_{k,1}v_{k,1} + \dots + x_{k,m_k}v_{k,m_k} = 0$$

merk nu op:

$$-x_{1,1}v_{1,1} + \dots + x_{1,m_1}v_{1,m_1} = u_1 \in E_{\lambda_1}$$

$\dots$

$$-x_{k,1}v_{k,1} + \dots + x_{k,m_k}v_{k,m_k} = u_k \in E_{\lambda_k}$$

de lin. comb. van hierboven is dus gelijk aan de som

$$u_1 + u_2 + \dots + u_k = 0 \quad \text{van k vect. i/d. eigenruimten}$$

behorende bij verschillende eigenwaarden

dan weten we dat deze som van eigenvect. nul oplevert $\rightarrow$
 ah $u_1 = u_2 = \dots = u_k = 0$ ($\lambda_1 u_1, \dots, \lambda_k u_k \in \text{N.O.}$)

waaruit volgt dat omdat $\{v_{1,1}, \dots, v_{1,m_1}\}$ lamm van E_{λ_1}

$$x_{1,1} = x_{1,2} = \dots = x_{1,m_1} = 0 \quad \text{analooz voor de andere coëff.}$$

Aangenomen β dus vrij en β bevat n elementen, $n = \dim V$,
 vormt ze een basis voor V , een basis van eigenvect. van L .

Dus volgt dat L diagonaliseerbaar is. □

propositie 5.25: Zij L een lin. transf. v/e eindigdim vektorruimte $(V, \varphi, +)$,
 waarvoor $\varphi_L(x)$ vol. ontbindt (over $\mathbb{R}$) als prod. van 1-graadsfactoren.
 Dan zijn determinant en spoor resp. het product en de som
 van alle eigenwaarden van L , elk λ_i geteld met haar $m(\lambda_i)$. $\lambda_i \in \text{Spec}(L)$

bewijs: We beschouwen $L: V \rightarrow V$ met $\text{Spec}(L) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ en $\varphi_L(x)$ ontbindt
 vol. als prod. van n 1-graadsfactoren

$$\text{Dan is } \varphi_L(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} = x^n - (m_1\lambda_1 + \dots + m_k\lambda_k)x^{n-1} + \dots + (-1)^n \prod_{i=1}^k \lambda_i^{m_i}$$

$m_i = m(\lambda_i)$ uitwerken: alle machten/sommen uitwerken & coëfficiënten per macht x^k

We gaan op zoek naar een uitdrukking voor det & de tr. matrix-
 voorstelling van L (voor de det van L aangezien matrix niet uit-
 gevergd is)

$$\varphi_L(x) = \det(xI_n - L_\alpha^A) \quad \text{met } L_\alpha^A \text{ matrix voorst. tov. willek. basis } \alpha \text{ van } V$$

$$\text{kiezen we } x=0 \text{ dan } \varphi_L(0) = \det(-L_\alpha^A) = (-1)^n \prod_{i=1}^k \lambda_i^{m_i}$$

$$\text{met } L_\alpha^A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ dus } \det(-L_\alpha^A) = (-1)^n \det(L_\alpha^A) = (-1)^n \prod_{i=1}^k \lambda_i^{m_i}$$

$$\Rightarrow \det(L_\alpha^A) = \prod_{i=1}^k \lambda_i^{m_i}$$

$$\Rightarrow \text{gelijkvorm matrices, zelfde det dus } \det(L) = \prod_{i=1}^k \lambda_i^{m_i}$$

Nu kiezen we in $\varphi_L(X) = X^n - (m_1\lambda_1 + \dots + m_k\lambda_k)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \prod_{i=1}^k \lambda_i m_i$
 naar de X^{n-1} coëff: $-(m_1\lambda_1 + \dots + m_k\lambda_k) = -\sum_{i=1}^k m_i \lambda_i$
 ? bijkomen $\sum_{i=1}^k m_i \lambda_i = -\sum_{i=1}^k (L_a^i)_{ii} = -\text{Tr}(L_a^i) = -\text{Tr}(L)$
 dus $\text{Tr}(L) = \sum_{i=1}^k m_i \lambda_i$ □

H6 - Inproductruimte en Euclidische ruimte

Stelling 6.11: Zij $(\mathbb{R}, V, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ inproductruimte met bijbehorende norm

$$\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R} : v \mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad \text{Dan geldt:}$$

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \forall v \in V : \| \lambda v \| = |\lambda| \|v\|$

bewijs voor inproductruimte:

$$\| \lambda v \| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle v, v \rangle} = |\lambda| \|v\| \quad \square$$

andere weg: Heron. mod

$$\| \lambda v \| = \sqrt{\lambda \lambda \langle v, v \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle v, v \rangle} = |\lambda| \|v\| \quad \square$$

! $|\lambda|$ is hier de modulus van $\lambda \in \mathbb{C}$ of $\lambda = a + bi$
dan $|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$

2. $\forall v \in V : \|v\| \geq 0$ en $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

bewijs a) omdat $\langle v, v \rangle \geq 0$ (positief) ook $\sqrt{\langle v, v \rangle} \geq 0$

b) omdat $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ of $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = 0$
of symmetrie
 $\Rightarrow \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$ □

Stelling 6.14: Zij $(\mathbb{R}, V, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte

1. Cauchy-Schwarz:

$$\forall v, w \in V : |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

2. $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \cdot \|w\|$ ana v en w lin. afhankelijk zijn

bewijs zij $v, w \in V$ 2 willek. vektoren

Als 1 of 2 (of beiden) de nulvekt. is, zijnde bewijzingen evident
 We stellen dus dat v en w niet-nulvektoren zijn.

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \langle v + \lambda w, v + \lambda w \rangle \geq 0$

$$\text{dus } \langle v, v \rangle + \langle \lambda w, v \rangle + \langle v, \lambda w \rangle + \langle \lambda w, \lambda w \rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow \|v\|^2 + 2\lambda \langle v, w \rangle + \lambda^2 \|w\|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 \|w\|^2 + 2\lambda \langle v, w \rangle + \|v\|^2 \geq 0$$

2e volgt die steeds pos. is $\Rightarrow$ 1 dubbel of geen nulpunt

$\Rightarrow$ discriminant ≤ 0

$$2^2 \langle v, w \rangle^2 - 4 \|w\|^2 \|v\|^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \langle v, w \rangle^2 \leq \|w\|^2 \|v\|^2$$

$$\Rightarrow |\langle v, w \rangle| \leq \|w\| \cdot \|v\| \quad \square$$

2. Er heedt een gelijkheid op ana de nuldiscriminant
 gelte in aan nul, maar als er een unieke oplossing λ_0 is
 volgt $\lambda^2 \|w\|^2 + 2\lambda \langle v, w \rangle + \|v\|^2 = 0$.

Dit betekent dat $\langle v + \lambda_0 w, v + \lambda_0 w \rangle = 0$, wat equivalent is
 met $v + \lambda_0 w = 0 \Rightarrow v = -\lambda_0 w$. Dus v en w L.A. □

• Stelling 6.19: Zij $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte met bijbehorende norm, dan
 $\forall v, w \in V: \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Bewijs We berekenen

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \quad \text{Cauchy-Schwarz} \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2\end{aligned}$$

Omdat $\|v+w\|$, $\|v\|$ en $\|w\|$ positief zijn, dan ook

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Grondslag te bewijzen: $\|v-w\| \leq \|v\| + \|w\|$

en driehoeksongelijkheid voor Herm. ruimte

• Stelling 6.23: Zij $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte en zij $\alpha = \{v_1, \dots, v_k\}$ een deelverzameling van V bestaande uit onderling $\perp$ aan $\perp$ orthogonale vectoren, allen verschillend (dus $\forall i \neq j: \langle v_i, v_j \rangle = 0$).
 Dan is α een vrije verzameling.

Bewijs Stel dat een lin. comb. van deze vect. de nulvektor oplevert:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = 0 \quad \text{met } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Dan geldt, voor elke $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, dat: $\langle v_i, 0 \rangle = \langle 0, v_i \rangle = 0$

$$\begin{aligned}0 &= \langle v_i, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \rangle \\ &= \sum_{j=1}^k \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle = \lambda_i \|v_i\|^2 \quad \forall i \neq j: \langle v_i, v_j \rangle = 0\end{aligned}$$

en dus bijgevolg $\lambda_i = 0$ want elke $v_i \neq 0$, dus $\{v_1, \dots, v_k\}$ vrij. □

• Stelling 6.26: Zij $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte en zij $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ een orthogonale basis van V .
 Beschouw willek. vectoren v en w in V met resp. $(x_1, \dots, x_n)$ en $(y_1, \dots, y_n)$ als coörd. tov β .

$$\text{Dan is } \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Bewijs Stel dus dat $\text{co}_\beta(v) = (x_1, \dots, x_n)$

$$\text{en } \text{co}_\beta(w) = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\text{Dus dat } v = \sum_{i=1}^n x_i v_i \quad \text{en } w = \sum_{j=1}^n y_j v_j$$

$$\begin{aligned}\langle v, w \rangle &= \langle \sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle v_i, v_j \rangle\end{aligned}$$

Omdat $\{v_1, \dots, v_n\}$ orthogonale basis $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$$\Rightarrow \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$= \langle \text{co}_\beta(v), \text{co}_\beta(w) \rangle$$

→ extra opg.: word afb. in een normvorm en bewaak het met. mod.

en dus ook de lengte en hoeken!

Stelling 6.27: Zij $(K, V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte en $v_1, \dots, v_n \in V$ een willekeurige basis van V , dan kan deze basis omgevormd worden tot een orthonormale basis $u_1, \dots, u_n \in V$ op alternatieve wijze via het orthonormalisatieproces v. Gram-Schmidt.

per inductie **bewijs** (constructief en stapsgewijs)

Neem de vector v_1 . We normaliseren deze vector en krijgen: $u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$

Neem nu vector v_2 en vorm $v_2' = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$

v_2' staat nu loodrecht op u_1 :

$$\langle v_2', u_1 \rangle = \langle v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1, u_1 \rangle = \langle v_2, u_1 \rangle - \langle v_2, u_1 \rangle \langle u_1, u_1 \rangle = 0$$

(basisstap)

Nu normaliseren we ook v_2' en krijgen we $u_2 = \frac{1}{\|v_2'\|} v_2'$ = 2. (norm)

we weten zeker dat $v_2' \neq 0$

$$\text{andere } v_2' = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = \langle v_2, u_1 \rangle u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \langle v_2, v_1 \rangle \cdot v_1$$

in dat zou v_2 dus een veelvoud zijn van v_1 , wat niet kan want $v_1, v_2, \dots, v_n$ is basis en dus L.O.

(inductiestap: wordt?)

Zo werken we stapsgewijs verder

stel nu dat we op een bep. moment reeds de gevormde, onderling orthogonale vect. $u_1, \dots, u_k$ hebben geconstrueerd

(voor $k=1, \dots$)

Neem nu v_{k+1} en vorm

$$v_{k+1}' = v_{k+1} - \langle v_{k+1}, u_1 \rangle u_1 - \langle v_{k+1}, u_2 \rangle u_2 - \dots - \langle v_{k+1}, u_k \rangle u_k$$

Nu staat v_{k+1}' loodrecht op zowel $u_1, \dots, u_k$ als u_k

$$\langle v_{k+1}', u_i \rangle = \langle v_{k+1}, u_i \rangle - \langle v_{k+1}, u_i \rangle \underbrace{\langle u_i, u_i \rangle}_1 - \underbrace{\langle v_{k+1}, u_2 \rangle \langle u_2, u_i \rangle}_{=0 \text{ want } u_2, \dots, u_k \text{ orthogon.}} - \dots = 0$$

dit geldt $\forall u_i, i=1, \dots, k$

Ook is $v_{k+1}' \neq 0$ anders was $v_1, \dots, v_n$ geen basis (zie verduidelijking)

Normaliseer nu v_{k+1}' en we verkrijgen u_{k+1}

Omdat de vectorruimte eindigdim. is en de geconstrueerde ~~verzamel~~ ^{verzamel} vectoren een groeiende reeks ^{verzamel} ~~verzamel~~ ^{verzamel} vormen, moet dit proces uiteindelijk stoppen (bij de n vect.).

De reeks verzameling met n vect. vormt dan een basis van V (dim= n) van orthonormale vect. (orthonorm. basis) □

alternatieve werkwijze:

$$u_{k+1}' = v_{k+1} - \frac{\langle v_{k+1}, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle v_{k+1}, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 - \dots - \frac{\langle v_{k+1}, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k$$

met $v_1, \dots, v_n$ gegeven basis

en $u_1, \dots, u_k$ orthogonale basis

$$u_{k+1}' \text{ moet dan nog genormeerd } \omega \text{ tot } u_{k+1}^* = \frac{u_{k+1}'}{\|u_{k+1}'\|}$$

! dat je niet mengt!

Stelling 6.31: Zij $(\mathbb{R}, V, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte en U een deelruimte van V . Dan geldt:

1. $U + U^\perp = U \oplus U^\perp$
2. $U \oplus U^\perp = V$
3. $\dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} U^\perp = \dim_{\mathbb{R}} V$
4. $(U^\perp)^\perp = U$

Bewijs we weten $U \subset V$

1) Stel $v \in U \cap U^\perp$, dan is $v \in U$ en $v \in U^\perp$
 dus is $\langle v, v \rangle = 0$. Het inproduct is definitief, dus $v = 0$
 de nom is dus een directe som

2) We nemen een basis van U en orthonormaliseren die tot

$$\beta_U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

Neem een willek. vector $v \in V$. We vormen:

$$v' = v - \langle v, u_1 \rangle u_1 - \dots - \langle v, u_n \rangle u_n$$

Het is nu eenvoudig te controleren dat v' orthogonaal is met alle basisvectoren u_i van U . Namelijk:

$$\langle v', u_i \rangle = \langle v, u_i \rangle - \langle v, u_i \rangle \langle u_i, u_i \rangle = 0$$

omdat β_U een orthonormale basis is

Dit betekent dat $v' \in U^\perp$. Wat betekent dat

$$v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_n \rangle u_n + v' \in U \oplus U^\perp$$

voor willekeurige $v \in V$. Dus $V = U \oplus U^\perp$

3) Dit volgt direct uit het feit dat $V = U \oplus U^\perp$ (stelling 6.31)

4) Uit de definitie van orthogonaal complement volgt

direct dat $U \subset (U^\perp)^\perp$ ($u \in U: u \perp u', u' \in U^\perp \Rightarrow u \in (U^\perp)^\perp$)

Als ze $(U \text{ en } (U^\perp)^\perp)$ dezelfde dim. hebben, zijn ze dan gelijk.

Stel $\dim(U) = n$

Dan $\dim(U^\perp) = n - \dim(U)$

en $\dim(U^\perp)^\perp = n - \dim(U^\perp)$ (want $U^\perp \oplus (U^\perp)^\perp = V$)

$$= n - (n - \dim(U))$$

$$= n - n + \dim(U) = \dim(U)$$

Dus $U = (U^\perp)^\perp$

□

Stelling 6.33: Als U een deelruimte is van de Eucl. ruimte $(\mathbb{R}, V, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ en $v \in V$, dan is $p(v)$ de vector in U op minimale afstand.

p is gedefinieerd als volgt:

$$p: V \rightarrow V: v \mapsto \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_n \rangle u_n \quad \text{met } \beta_U = \{u_1, \dots, u_n\}$$

Neem een willek. $u \in U$. Omdat $p(v) \in U$

is ook $(p(v) - u) \in U$

Verder is $(v - p(v)) \in U^\perp$ en dus geldt $\langle v - p(v), p(v) - u \rangle = 0$

We berekenen nu

$$d(v, u)^2 = \|v - u\|^2 = \|(v - p(v)) + (p(v) - u)\|^2$$

$$= \langle v - p(v), v - p(v) \rangle + \langle p(v) - u, p(v) - u \rangle$$

$$= \|v - p(v)\|^2 + \|p(v) - u\|^2 \geq \|v - p(v)\|^2$$

$$\|v - u\|^2 \geq \|v - p(v)\|^2 \Rightarrow d(v, w)^2 \geq d(v, p(v))^2$$

De afstand van v tot eerder welke $u \in U$ in dus niet of gelijk aan de afstand van v tot $p(v) \in U$. $\square$

Lemma 6.38: Zg $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de standaard Euclidische ruimte en $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: X \mapsto AX$ een lineaire transformatie met een symm. matrix A . Dan heeft A uitdrukkend reële eigenwaarden.

maakt dan ontbreekt φ_A wil. als product van 1's factoren over $\mathbb{R}$.

Bewijs We vertrekken vanuit de standaard unitaire ruimte $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, met standaard Hermitisch prod. $\langle x, y \rangle = \bar{x}^T \cdot y$. De lin. transf. is dan $L_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n: X \mapsto AX$ met $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dan heeft $\varphi_A \in \mathbb{R}[X]$ noemens een nulpunt in $\mathbb{C}$ (niet-triviale algebra). Deze nulpunten zijn de eig.waarden van $L_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ en dus potentieel complexe (niet-reële) getallen. Stel dat $\lambda \in \mathbb{C}$ zo'n eigenwaarde is en $X \in \mathbb{C}^n$ bijbehorende eigenvector.

Dus is $AX = \lambda X$. We vinden dan dat

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \langle X, X \rangle &= \langle X, \lambda X \rangle = \langle X, AX \rangle \\ &= \bar{X}^T \cdot A \cdot X \\ &= \bar{X}^T \cdot A^T \cdot X \quad (A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ en symm}) \\ &= \overline{A \cdot X}^T \cdot X \\ &= \langle A \cdot X, X \rangle \\ &= \langle \lambda X, X \rangle \\ &= \bar{\lambda} \langle X, X \rangle \end{aligned}$$

stel $\lambda = a + bi$
met $a, b \in \mathbb{R}$
dan $\bar{\lambda} = a - bi$

als $\lambda = \bar{\lambda}$ dan $a + bi = a - bi$

$$\Rightarrow bi = -bi \Rightarrow b = -b \Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = a \in \mathbb{R}$$

Omdat $X \neq 0$ (eigvect) concluderen we dat $\lambda = \bar{\lambda}$, dus is $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

↳ resultaat geldt ook voor matrices waarvan $A^T = A$

Lemma 6.39: Zg $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de standaard Eucl. ruimte en $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: X \mapsto AX$ een lin transf. met een symm matrix A . Dan zijn eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden orthogonaal.

Bewijs We weten dat de eigenwaarden ^{van L_A} reëel zijn (zie vorig lemma)

Stel dat $\lambda_1 \neq \lambda_2$ eigenwaarden zijn met resp bijbehorende eigvect

X_1 en $X_2 \in \mathbb{R}^n$. We berekenen nu

$$\begin{aligned} \lambda_2 \langle X_1, X_2 \rangle &= \langle X_1, \lambda_2 X_2 \rangle = \langle X_1, A X_2 \rangle \\ &= X_1^T \cdot A X_2 \\ &= (A \cdot X_1)^T \cdot X_2 \\ &= \langle A X_1, X_2 \rangle = \langle \lambda_1 X_1, X_2 \rangle \\ &= \lambda_1 \langle X_1, X_2 \rangle \end{aligned}$$

waarmee volgt dat $(\lambda_2 - \lambda_1) \langle X_1, X_2 \rangle = 0$

Omdat $\lambda_1 \neq \lambda_2$ kan men weten dat

volgt dat $\lambda_1 \perp X_2$

Lemma 6.40: Zg. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de stand. Euc. ruimte en $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: x \mapsto Ax$ een lineaire transf. met een symm. matrix A . Dan is, voor elke eigenwaarde λ van L_A , de meeth. multipliciteit $d(\lambda)$ gelijk aan de algebraïsche multipliciteit $m(\lambda)$.

Wijz. We willen aantonen dat voor $\lambda \in \text{Spec}(L_A)$: $\dim_{\mathbb{R}} E_\lambda = d(\lambda) = m(\lambda)$. We bestuderen nu de lineair. vektorruimte φ_A van L_A , maar van een andere (gelijkvormige) matrix. Deze andere matrix-voorstelling krijgen we door een nieuwe basis voor $\mathbb{R}^n$ te kiezen. Dit doen we als volgt:

We weten dat $\mathbb{R}^n = E_\lambda \oplus E_\lambda^\perp$. Kies een basis $\beta_\lambda = \{u_1, \dots, u_d\}$ van E_λ en breid uit tot een basis β van $\mathbb{R}^n$ door aan te vullen met een basis van $E_\lambda^\perp$.

Neem een willek. vector $y \in E_\lambda^\perp$. We willen inzien dat $A \cdot y$ ook tot $E_\lambda^\perp$ behoort.

$$\begin{aligned}\langle x, Ay \rangle &= x^T \cdot Ay \\ &= (Ax)^T \cdot y \\ &= \langle Ax, y \rangle\end{aligned}$$

Indedaad, voor een willek. vector $x \in E_\lambda$ geldt:

$$\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = 0$$

maar $Ay \in E_\lambda^\perp$.

We kunnen de lin. transf. L_A dus beperken tot $E_\lambda^\perp$, dus een lin. transf. $E_\lambda^\perp \rightarrow E_\lambda^\perp$.

Abste nu de matrixvoorstelling van $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tov β opstellen, krijgen we

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot \mathbb{I}_{\dim} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

B

B is een matrix van orde $n-d$.

ook stelling 6.42 (aanbrengen)

Hiervan staat B voor de matrixvoorstelling van $L_A: E_\lambda^\perp \rightarrow E_\lambda^\perp$. We zullen nu aantonen dat λ geen eigenwaarde van B kan zijn.

Stel dat λ wel eigenwaarde van B , dan mer een eigenvect. $y \in E_\lambda^\perp$ met eigenwaarde λ in B . Omdat B de matrixvoorstelling is van een beperking van L_A is y dus eigenlijk ook een eigenvect. voor L_A . Deze eigenvect. moet dan (wegens def. E_λ) ook tot E_λ behoren.

Maar $E_\lambda \cap E_\lambda^\perp = \{0\}$ en dus is $y = 0$, wat niet kan (als eigenvect.). Dus λ geen eigenwaarde van B .

Vermits $\varphi_A = (x - \lambda)^{d(\lambda)}$ p_B geldt dan indedaad $m(\lambda) = d(\lambda)$.

Stelling 6.42: Spectraalstelling voor symmetrische matrices

Zg. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de stand. Euc. ruimte en $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: x \mapsto Ax$ een lin. transf. met een symm. matr. A . Dan bestaat er een orthonorm. basis van $\mathbb{R}^n$ bestaande uit eigenvect. van A . Maar dan is A gelijkvormig met een diagon. matrix en de gelijkvormigheid kan per abbrek. $\tilde{w}$ door een basisverandering v.d. stand. orthonorm. basis naar een orthonorm. basis.

afhanging
in 4 breedte
uitgebreiden

Lemma TB (A) $\mathbb{R}^{n \times n}$ symm) $\exists$ orthonorm. basis voor $\mathbb{R}^n$ bestaande uit
eigenvectoren van A

- B 1. Neem sym $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dan zijn alle nulpunten van
 φ_A reëel $\rightarrow \varphi_A$ ontbindt volledig in lineaire factoren
= lemma 6.36
2. Voor elk van deze nulpunten van φ_A / eigenwaarden v. A,
zeg λ , is met m. multipl $d(\lambda) = \text{algebra. mult. m}(\lambda)$
= lemma 6.40
3. Eigeldt dan ook dat de eigenvectoren behorende bij
verschillende eigenwaarden van A orthogonaal zijn
= lemma 6.38

het kwadraat
eigenwaarden

We hebben dus een volledige ontbinding met voor elke
 $\lambda_i \in \text{Spec}(L_A)$ geldt dat $\dim E_{\lambda_i} = d(\lambda_i) = m(\lambda_i)$ en ook
 $\sum_{i=1}^k m(\lambda_i) = \dim \mathbb{R}^n = n$ dus dan is deverz. van alle
eigenvectoren van alle λ_i al van de juiste dimensie.

Nu bestaat het voor elke eig. λ een orthonormale
basis voor bijhorende eigenvectoren te bepalen en
die samen te voegen; dan krijgen $\mathbb{R}^n = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$
met $\text{Spec}(L_A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.

Deze basissen zijn natuurlijk ^{zelf} vrij en wettig
en tot elkaar ook vrij want orthogonaal (lemma 6.38).
En door de afmeting is deze verzameling dus een
orthonorm. basis voor $\mathbb{R}^n$ van eigenvectoren van A.

stelling 6.46:

Zij $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ stand. Een kwadratische ruimte in $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
vierkante matrix. Dan zijn volgende beweringen al equivalent:

1. de kolommen van A vormen een orthonorm. basis voor $\mathbb{R}^n$
2. $A^T \cdot A = I_n$
3. $A^T = A^{-1}$
4. $A \cdot A^T = I_n$
5. de rgen van A vormen een orthonorm. basis voor $\mathbb{R}^n$

bewijs 1 $\Rightarrow$ 2) Stel $C_1, \dots, C_n$ kolommen van A, dan zijn $C_1, \dots, C_n$
orthonormaal.

We schrijven A als $A = (C_1 \dots C_n)$ en dan $A^T = \begin{pmatrix} C_1^T \\ \vdots \\ C_n^T \end{pmatrix}$
Dan is $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} \langle C_1, C_1 \rangle & \dots & \langle C_1, C_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle C_n, C_1 \rangle & \dots & \langle C_n, C_n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n$

want $\langle C_i, C_i \rangle = 1$ en $\langle C_i, C_j \rangle = 0$ met $i \neq j$ (ORTHONORM)

2 $\Rightarrow$ 3) univerteit inverse vierkante matrix

3 $\Rightarrow$ 4) definitie inverse

4 $\Rightarrow$ 5)

• **Lemma 6.50:** Als $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een orthogon. matrix is, dan geldt dat:

1) $\det A \in \{-1, 1\}$

2) elke (reële) eigenwaarde van A gelijk is aan $+1$ of -1

Bewijs 1) Bg een orthogonale matrix geldt $A^{-1} = A^T$

Dus dan $\det(A^{-1}) = \det(A^T)$

maar $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ en $\det(A^T) = \det(A)$

Dus dan: $\frac{1}{\det A} = \det A$. Dit gaat enkel op als $\det A = 1$ of $\det A = -1$

2) Zg λ een reële eigenwaarde van A met bijhorende eigenvect $v \in \mathbb{R}^n$

Dan is $\lambda^2 \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \langle Av, Av \rangle = (Av)^T \cdot Av$

$= v^T A^T A v = v^T A^{-1} A v$

$= v^T \cdot v = \langle v, v \rangle$

Bijgevolg is $\lambda^2 = 1$ en dus $\lambda = 1$ of $\lambda = -1$. □

• **Stelling 6.51:** Zg $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ stand. Eukl. ruimte. In veronderstel dat $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$ een lin. transf. met orthogon. matr. A . Dan geldt:

(1) $\|Ax\| = \|x\|$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

(2) $d(Ax, Ay) = d(x, y)$

(3) L_A is een isomorfisme

(4) als $u_1, \dots, u_n$ een orthonorm. basis van $\mathbb{R}^n$ is, is

$\{L_A(u_1), \dots, L_A(u_n)\}$ weer een orthonorm. basis

Bewijs Voor $x, y \in \mathbb{R}^n$ is $\langle Ax, Ay \rangle = (Ax)^T Ay = x^T A^T A y = x^T y = \langle x, y \rangle$

hieruit volgt dat L_A lengte, afstand en orthogonaaliteit van vectoren in $\mathbb{R}^n$ bewaart. Dit bewijst (1) en (2).

• **Lemma 6.50:** Als $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een orthogon. matrix is, dan geldt dat:

Aangezien 0 geen eigenwaarde van L_A is en dus $\ker(L_A) = \{0\}$

$\Rightarrow L_A$ is injectief. L_A is ook een transformatie $\Rightarrow$ bijjectief & lineair $\Rightarrow$ isomorfisme (3). Omdat L_A lengte en orthogon. bewaart, volgt dus ook (4). □

• **Stelling 6.52:** Als $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ een orthogon. matrix, dan geldt voor de matrix-norm of Frobeniusnorm:

$\|PA\|_F = \|P\|_F \|A\|_F$

Bewijs We hebben al reeds dat $\|A\|_F^2 = \langle A, A \rangle_F = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik}^2$

Als we $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ noteren als een rij van vectoren dan geldt dus dat

$\|A\|_F^2 = \sum_{k=1}^n \|a_k\|^2$ met $\|a_k\|$ standaard Eukl. norm

De kolommen van PA zijn nu precies de kolomvectoren $P \cdot a_k$ uit de vorige stelling + feit dat P orthogon. matr. is:

$\|PA\|_F^2 = \sum_{k=1}^n \|Pa_k\|^2 = \sum_{k=1}^n \|P\|_F^2 \|a_k\|^2 = \|P\|_F^2 \|A\|_F^2$

□

• opdracht 6.49: Voor $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$\exists$ orthogon. matrix P :

$\Rightarrow A$ is symm.

$P^T A P = P^T A P$ is diagon. matrix

bewijs