

Lineaire Algebra

Samenvatting

De Roover Robin

2010-2011

Deze samenvatting is een overzicht van alle definities, stellingen, lemma's en proposities met hun bijhorende bewijzen. Deze samenvatting is gebaseerd op de cursus Lineaire Algebra Academiejaar 2010-2011 door Prof. Wim Veys en Prof. Paul G. Igodt.

1. Matrixrekenen

Propositie 1.7

Elke matrix is rij-equivalent met een matrix in echelonvorm en zelfs met een matrix die rijgereduceerd is.

Summarize:

- Door propositie 1.7 en stelling 1.8 weten we dat ieder stelsel van vergelijkingen al dan niet een oplossing heeft en wat die oplossing(en) dan is.
- Als er juist één oplossing is (en dus enkel basisvariabelen) dan is de matrix rij-equivalent met de eenheidsmatrix.

Definitie 1.14

Een $m \times n$ -matrix is:

- symmetrisch $\leftrightarrow A^T = A$;
- scheefsymmetrisch $\leftrightarrow A^T = -A$;
- diagonaalmatrix $\leftrightarrow a_{ij} = 0$ voor alle $i, j \in \mathbb{R}$ als $i \neq j$

Summarize:

Het matrixproduct van twee matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times n} = a_{ij}$ en $B \in \mathbb{R}^{n \times p} = b_{jl}$ bepaalt een matrix $C \in \mathbb{R}^{m \times p}$ waarvoor geldt dat:

$$c_{il} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jl}$$

Voor een $(n \times m)$ -matrix geldt:

- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- het matrixproduct is niet commutatief

Voor een vierkante $(n \times n)$ -matrix geldt:

- $A \cdot A^T \rightarrow$ *symmetrische matrix*
- $A + A^T \rightarrow$ *symmetrische matrix*
- $A - A^T \rightarrow$ *scheefsymmetrische matrix*
- A is de som van een scheefsymmetrische en een symmetrische matrix

Definitie 1.20

Het spoor van een vierkante $(n \times n)$ -matrix is

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

waarvoor geldt dat

$$\text{Tr}(A \cdot B) = \text{Tr}(B \cdot A)$$

Stelling 1.26

Als een vierkante matrix A een links inverse B en een recht inverse C heeft dan geldt dat $B = C$

Terminologie

inverteerbaar = regulier = niet-singulier
niet-inverteerbaar = singulier

Stelling 1.28

Als A en B inverteerbare matrices (van dezelfde afmeting) zijn, dan is ook hun product inverteerbaar en bovendien geldt dat

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Stelling 1.31

Beschouw een $(n \times n)$ -stelsel eerstegraadsvergelijkingen met coëfficiëntenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Dan zijn de volgende beweringen equivalent:

1. de matrix A heeft een links inverse;
2. het stelsel $A \cdot X = 0$ heeft enkel de oplossing $X = 0$;
3. de matrix A is rij-equivalent met I_n ;
4. de matrix A is een product van elementaire matrices;
5. de matrix A is inverteerbaar;
6. de matrix A heeft een rechts inverse;

Summarize

beschouw een matrix $(A|I_n)$ zodat indien we A rijreduceren naar een rijgereduceerde matrix en we dezelfde elementaire rijoperaties toepassen op I_n dan geldt dat ofwel:

- er een nulrij in A ontstaat zodat de matrix A niet-inverteerbaar is;
- ontstaat er uit A een eenheidsmatrix zodat we volgende vorm krijgen $(I_n|A^{-1})$

Lemma 1.33

Veronderstel dat A en B $(n \times n)$ -matrices zijn. Dan geldt:

1. als A en B benedendriehoeksmatrices zijn, dan is ook $A \cdot B$ een benedendriehoeksmatrix;
2. als A en B bovendriehoeksmatrices zijn, dan is ook $A \cdot B$ een bovendriehoeksmatrix;

Stelling 1.36

Veronderstel dat A een $(m \times n)$ -matrix is, die in echelonvorm kan gebracht worden door elementaire rijoperaties zonder rijomwisseling te gebruiken. Dan bestaat er een $(m \times n)$ -benedendriehoeksmatrix L en een $(m \times n)$ -bovendriehoeksmatrix U zodat

$$A = L \cdot U$$

Stelling 1.38

Zij A een inverteerbare $(n \times n)$ -matrix die via rijoperaties tot in trapvorm kan gebracht worden zonder rijen te verwisselen. Dan bestaat er een unieke benedendriehoeksmatrix L met enkel énen op de diagonaal en een unieke bovendriehoeksmatrix zodat $A = L \cdot U$

$$A \cdot X = L \cdot \underbrace{U \cdot X}_Y = B$$

Werkwijze:

LU decompositie:

Als we A rijherleiden tot U zodat we een bovendriehoeksmatrix krijgen en we de aangeduide elementen in de matrix L' waarin alle andere elementen nullen zijn, dan leveren dezelfde elementaire rij operaties op L' de diagonaalmatrix op zodat indien we de elementen in de i-de kolom delen door het pivoteringsselement l_{ii} we dan de matrix L verkrijgen die na elementaire rijoperaties transformeert naar de eenheidsmatrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - a_{12} & \cdots & a_{2n} - a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} - a_{12} & \cdots & a_{nn} - a_{1n} \end{pmatrix} \rightarrow U$$
$$L' = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - a_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} - a_{12} & \cdots & ** \end{pmatrix} \rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{11}} & \frac{a_{n2} - a_{12}}{a_{12}} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

2. Determinant

Definitie 2.1

Een afbeelding

$$f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} : A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \rightarrow f(A)$$

met de eigenschappen:

D-1 $f(I_n) = 1$;

D-2 $f(A)$ verandert van teken als men in de matrix A twee rijen van plaats verwisselt;

D-3 f is lineair in de eerste rij, d.w.z. dat voor alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$f \begin{pmatrix} \lambda R_1 + \mu R'_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = \lambda f \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} + \mu f \begin{pmatrix} R'_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$$

noemen we een determinant afbeelding

Stelling 2.2

Een afbeelding $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} : A \rightarrow f(A)$ die aan de eigenschappen **D-1**, **D-2** en **D-3** voldoet, voldoet eveneens aan de volgende eigenschappen:

D-4 f is lineair in rij i voor elke $i \in \{1, 2, \dots, n\}$;

D-5 als er in de matrix A een nulrij is of als er twee gelijke rijen zijn in A , dan is $f(A) = 0$;

B

D-4: uit **D-2** en **D-3** volgt dat we de i -de rij kunnen verwisselen met de eerste rij zodat het teken van $f(A)$ verandert en we de lineariteit in de eerste rij kunnen gebruiken. Wanneer we nu in beide afbeeldingen de i -de rij verwisselen met de eerste rij maken we de wijziging van het teken ongedaan.

D-5: indien de i -de rij gelijk is aan de j -de rij dan kunnen we de i -de rij met de j -de rij verwisselen zodat het teken van $f(A)$ verandert, enkel 0 is gelijk aan min zichzelf dus is $f(A) = 0$
uit **D-4** volgt dat door middel van de lineariteit in de i -de rij we een nulrij kunnen schrijven als een combinatie van twee nulrijen zodat we door de lineariteit krijgen dat $f(A)$ gelijk is aan zichzelf plus zichzelf, enkel nul voldoet hieraan dus is $f(A) = 0$ ■

Stelling 2.3

Als $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} : A \rightarrow f(A)$ een determinantaafbeelding is, dan geldt:

- als men op de matrix A een elementaire rijoperatie uitvoert van het type $R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j$ ($i \neq j$) dan verandert $f(A)$ niet;
- als E een elementaire matrix is dan is

$$f(E) \begin{cases} 1 \text{ als } E \text{ correspondeert met } R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j \\ -1 \text{ als } E \text{ correspondeert met } R_i \leftrightarrow R_j \\ \lambda \text{ als } E \text{ correspondeert met } R_i \rightarrow \lambda R_i \end{cases}$$

- als E een elementaire matrix is, geldt steeds dat $f(E \cdot A) = f(E) \cdot f(A)$;

B

1: door middel van **D-4** kunnen we $f(A)$ anders schrijven zodat we $f(A)$ gelijk is aan een afbeelding waarin R_i staat plus een afbeelding waarin twee maal R_j staat zodat d.m.v. **D-5** de tweede afbeelding gelijk is aan 0, bij gevolg verandert $f(A)$ niet indien we zulke elementaire rijoperatie uitvoeren.

$$3: f(E \cdot A) = f \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

$$= f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

d.m.v. **D-4** geldt

$$= \lambda f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = f(E) \cdot f(A)$$

analoge redenering voor de andere elementaire matrices

■

Stelling 2.4

Als $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} : A \rightarrow f(A)$ een determinant afbeelding is, dan geldt dat

1. als A een driehoeksmatrix is, $f(A)$ gelijk is aan het product van de diagonaalelementen in A;
2. A inverteerbaar is als en slechts als $f(A) \neq 0$;
3. $f(A \cdot B) = f(A) \cdot f(B)$ voor elke twee matrices A en B in $\mathbb{R}^{n \times n}$;
4. $f(A^T) = f(A)$;

B

- 1: - als A een diagonaalmatrix is dan volgt uit **D-4** en **D-1** dat de afbeelding gelijk is aan het product van de elementen op de hoofddiagonaal,
 - als A een bovendriehoeksmatrix is, en er op de diagonaal van A geen nullen staan dan is A rij-equivalent (uitsluiten met behulp van rij-operaties van het type $R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j$) met een diagonaalmatrix met precies dezelfde diagonaalelementen waaruit het beweerde volgt. Als A een bovendriehoeksmatrix is en er op de diagonaal wel een 0 staat dan is A rij-equivalent met een matrix waarin een nul-rij staat zodat bijgevolg de afbeelding gelijk is aan nul.
- 2: een inverteerbare matrix A is te schrijven als het product van elementaire matrices (stelling 1.13 punt 4) zodat $f(A) = f(E_1) \cdot f(E_2) \cdots f(E_n)$, omdat de afbeelding van elementaire matrices niet gelijk zijn aan 0 is bijgevolg $f(A)$ niet gelijk aan 0
- 3: als A inverteerbaar is dan is A te schrijven als het product van elementaire matrices zodat d.m.v. stelling 2.3 punt 3
 $f(A \cdot B) = f(E_1 \cdot E_2 \cdots E_n \cdot B) = f(E_1) \cdot f(E_2) \cdots f(E_n) \cdot f(B) = f(A) \cdot f(B)$
 merk op dat als A niet inverteerbaar is dan is ook A . B niet inverteerbaar
- 4: als A inverteerbaar is dan is A^T ook inverteerbaar en omgekeerd, zodat we A kunnen schrijven als het product van elementaire matrices, merk op dat $f(E) = f(E^T)$ zodat we het product van de beelden van de getransponeerde elementaire matrices kunnen schrijven als het beeld van A^T

■

Gevolg 2.5

2. als f een determinantaafbeelding is, en de matrix A is inverteerbaar, dan is $f(A^{-1}) = \frac{1}{f(A)}$;
3. door het feit dat $f(A^T) = f(A)$ kunnen we nu ook eenvoudig inzien dat de eigenschappen **D-2** en **D-3** en bijgevolg **D-4** en **D-5** blijven gelden wanneer ze worden uitgedrukt in termen van kolommen i.p.v. in termen van rijen

Stelling 2.7

Elke permutatie is een samenstelling van transposities (een permutatie die twee elementen verwisselt en alle andere elementen op zichzelf afbeeld)

Definitie 2.8

Zij $\sigma \in S_n$ met S_n de verzameling van alle mogelijke permutaties

1. zij i en j verschillende elementen uit $\{1, 2, \dots, n-1, n\}$
Het paar $\{i, j\}$ is een inversie van σ als $i < j$ en $\sigma(i) > \sigma(j)$
2. het teken van σ , genoteerd $sgn(\sigma)$, is 1 als het aantal inversies van σ even is, en -1 als dat aantal oneven is

In formulevorm: $sgn(\sigma) = (-1)^{\#\{\text{inversies van } \sigma\}}$

Stelling 2.10

Zij σ een willekeurige permutatie en τ een transpositie in S_n dan geldt

$$sgn(\tau \circ \sigma) = -sgn(\sigma)$$

Stelling 2.12

Zij σ in S_n een samenstelling van m transposities.

Dan is $sgn(\sigma) = (-1)^m$

Stelling 2.15

Zij A een $(n \times n)$ -matrix. Dan is

1. $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij})$ (ontwikkelen naar de i -de rij)
2. $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij})$ (ontwikkelen naar de j -de kolom)

met M_{ij} een $((n-1) \times (n-1))$ -deelmatrix van A

Stelling 2.18

Als $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dan geldt dat

$$A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{pmatrix} = I_n \cdot \det(A)$$

met $adj(A) = (C_{ij})^T$ getransponeerde van de cofactorenmatrix gevormd door de cofactoren van A , $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ die bij elk element a_{ij} van A hoort

Gevolg 2.19

Als de matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inverteerbaar is met andere woorden als $\det(A) \neq 0$, dan geldt dat

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

3. Vectorruimten

3.1 Vectorruimten en deelvectorruimten

Definitie 3.2

Een verzameling V met bewerkingen ('optelling') $+: V \times V \rightarrow V$ zó dat voldaan is aan de eigenschappen

1. de optelling is inwendig en overal bepaald;
2. de optelling is **associatief**, m.a.w. $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$ voor alle $v_1, v_2, v_3 \in V$;
3. er is een **neutraal element**, 0 genoteerd, voor de optelling, d.w.z. dat $0 + v = 0 = v + 0$ voor alle $v \in V$;
4. elk element v in V heeft een **tegengesteld element**, d.w.z. een element $v' \in V$ zodat $v + v' = 0 = v' + v$;
5. de optelling is **commutatief**, m.a.w. $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$;

noemen we een **commutatieve** groep. We schrijven kort: $(V, +)$ is een commutatieve groep.

Definitie 3.3

Een reële vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ genoteerd, bestaat uit een commutatieve groep $(V, +)$, samen met een uitwendige bewerking

$$\mathbb{R} \times V \rightarrow V : (\lambda, v) \rightarrow \lambda \cdot v$$

zodat ook volgende eigenschappen voldaan zijn

6. **distributiviteit-1**: $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ en voor alle $v \in V$;
7. **distributiviteit-2**: $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$ voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ en voor alle $v \in V$;
8. **distributiviteit-3**: $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v$ voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ en voor alle $v \in V$;
- o coëfficiënt 1: $1 \cdot v = v$ voor alle $v \in V$;

De getallen λ (in $\mathbb{R}$) noemen we *coëfficiënten* of *scalaren*; de elementen v (in V) noemen we *vectoren*. Het neutrale element 0 voor de optelling noemen we de nulvector.

Lemma 3.5

In een vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ geldt voor alle vectoren $v, w, x \in V$ de implicatie

$$v + x = w + x \rightarrow v = w$$

B

Als we bij beide leden het tegengesteld element van x toevoegen dan krijgen we dat

$$v + x = w + x \rightarrow v + x + (-x) = w + x + (-x) \rightarrow v + 0 = w + 0 \rightarrow v = w$$

■

Lemma 3.6

In een vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ geldt, voor alle vectoren $v \in V$ en voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

- o $0 \cdot v = 0 = \lambda \cdot 0$;
- o $(-1) \cdot v = -v = 1 \cdot (-v)$;
- o $(-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (-v)$;

B

- o Gebruik makend van de distributiviteitseigenschappen verkrijgen we $0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$ waaruit volgt dat $0 \cdot v = 0 \quad v \in V$ indien we het neutraal element gebruiken krijgen we $\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0 + 0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$ waaruit volgt dat $\lambda \cdot 0 = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}$

- axioma 4 van definitie 3.3 zegt dat $1(-v) = -v$
Bekijk nu $v + 1(-v) = 1v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0v = 0$, bijgevolg is $(-1)v$ het tegengesteld element van v .
- gebruik makend van de distributiviteit (3) verkrijgen we

$$(-\lambda)v = 1((- \lambda)v) = (1(-\lambda))v = ((-1)\lambda)v = (-1)(\lambda v) = -(\lambda v)$$
en analoog

$$(1(-\lambda))v = \lambda((-1)v) = \lambda(-v)$$

■

Definitie 3.8

Als $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte is en U een deelverzameling van V zodat $(\mathbb{R}, U, +)$ met dezelfde optelling en scalaire vermenigvuldiging als in V , ook een vectorruimte is, dan noemen we $(\mathbb{R}, U, +)$ een **deelvectorruimte** of **deelruimte** van $(\mathbb{R}, V, +)$

Stelling 3.9 (Kenmerk van deelruimte)

Zij gegeven de vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$. Een deelverzameling U van V is een deelruimte als en slechts als

- voor alle $x, y \in U$ geldt $x + y \in U$;
- voor alle $x \in U$ en voor alle $r \in \mathbb{R}$ geldt $r \cdot x \in U$;

of equivalent hiermee

- $U \neq \emptyset$;
- voor alle $x, y \in U$ en voor alle $r, s \in \mathbb{R}$ geldt: $rx + sy \in U$;

B equivalenties

- als $0 \in U$ dan is bovenstaand gegeven bewezen
als $0 \notin U$ maar $0 \in V$ met een willekeurige $w \in U$ dan volgt uit kenmerk 2 van de deelruimte dat $(-1)w = -w \in U$ zodat $w + (-w) = 0 \in U$
- uit de eerste twee kenmerken van de deelruimte en de axioma's van een vectorruimte volgt dat $rx + sy \in U$

■

Propositie 3.11

De doorsnede van een aantal deelruimten van een vectorruimte V is opnieuw een deelruimte van V
notatie: $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n = \bigcap_{i=1}^n U_i \mid U_i (i \in I)$

Definitie 3.12

Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte en D een niet-lege deelverzameling van V . De deel(vector)ruimte van $(\mathbb{R}, V, +)$ voortgebracht door D is

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid x_1, \dots, x_n \in D \text{ en } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}$$

We noteren $vct(D)$ of $span(D)$ of $\langle D \rangle$ voor deze vectorruimte. Als D eindig is, zeg $D = \{x_1, \dots, x_n\}$ dan noteren we deze deelruimte ook als $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$

Als $D = \emptyset$ spreken we af dat $vct(D) = \{0\}$.

Definitie 3.15

Veronderstel dat $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte is, met deelvectorruimten U en W .

Dan is de verzameling

$$\{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

een deelvectorruimte van V . Deze deelruimte noemen we de **somruimte** of **som** van U en W en noteren we $U + W$.

Meer algemeen als $U_1, \dots, U_k$ deelruimten zijn van V , dan definiëren we de somruimte

$$\sum_{i=1}^k U_i = U_1 + \dots + U_k = \left\{ \sum_{i=1}^k u_i \mid u_i \in U_i \text{ voor alle } i = 1, \dots, k \right\}$$

Een somruimte $\sum_{i=1}^k U_i$ noemen we een **directe som** als en slechts als elk element van $\sum_{i=1}^k U_i$ op precies één manier te schrijven valt als de som van vectoren uit elk van de deelruimten. Dit wil zeggen dat er voor alle $v \in \sum_{i=1}^k U_i$ **unieke** vectoren $u_1 \in U_1, \dots, u_k \in U_k$ bestaan zodat

$$v = u_1 + \dots + u_k$$

In het geval van een directe som noteren we $\bigoplus_{j=1}^k U_j = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$. In het geval van slechts twee deelruimten U en W noteren we een directe som als $U \oplus W$.

Propositie 3.17

Gegeven is een vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$.

1. Zij U_1 en U_2 deelruimten van V . Dan geldt dat $W = U_1 \oplus U_2$ als en slechts als $W = U_1 + U_2$ en $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.
2. Algemener zij $U_1, \dots, U_k$ deelruimten van V . Dan is $W = U_1 + \dots + U_k$ en $U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) = \{0\}$ voor alle $i = 1, \dots, k$

B

$\rightarrow$

Veronderstel dat $W = U_1 \oplus U_2$ dan geldt voor een willekeurige vector $v \in U_1 \cap U_2$ dat

$$0 = \underbrace{v}_{\in U_1} + \underbrace{0}_{\in U_2} = \underbrace{0}_{\in U_1} + \underbrace{v}_{\in U_2}$$

en krijgen we een contradictie.

Analoge redenering voor het algemene geval.

$\leftarrow$

Veronderstel dat $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ en we $W = U_1 + U_2$ met $w \in W$, dan kunnen we w schrijven als

$$w = u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2 \text{ met } u_1, u'_1 \in U_1 \text{ en } u_2, u'_2 \in U_2$$

dan volgt dat $\underbrace{u_1 - u'_1}_{\in U_1} = \underbrace{u_2 - u'_2}_{\in U_2} \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$

bij gevolg is $u_1 = u'_1$ en $u_2 = u'_2$

■

3.2 Lineaire onafhankelijkheid, basis en dimensie

Definitie 3.19

Gegeven is een vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$. Een deelverzameling D van V noemen we **lineair afhankelijk** of **niet-vrij** als en slechts als er een vector bestaat in D die te schrijven valt als lineaire combinatie van (eindig veel) andere vectoren van D . We noemen D **lineair onafhankelijk** of **vrij** als en slechts als D niet lineair onafhankelijk is, m.a.w. als en slechts als er geen enkele vector in D bestaat die een lineaire combinatie is van de andere vectoren in D .

Propositie 3.20

Gegeven is een vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ en een deelverzameling D . Dan is D **vrij** als en slechts als de enige lineaire combinatie van vectoren in D die de nulvector oplevert die lineaire combinatie is waarin alle coëfficiënten nul zijn.

voor willekeurige $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ en willekeurige $v_1, \dots, v_k \in D$ geldt

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0 \leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0 \right)$$

Indien D eindig is, zeg $D = \{w_1, \dots, w_n\}$, is D dus vrij als en slechts als voor willekeurige $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ geldt

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i w_i = 0 \leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \right)$$

B

Veronderstel dat er een lineaire combinatie van vectoren in D bestaat die de nulvector oplevert maar waarin niet alle coëfficiënten gelijk zijn aan 0. Dan kunnen we een willekeurige v_i , waarvoor geldt dat $\lambda_i \neq 0$, schrijven als een lineaire combinatie van de overige vectoren gedeeld door zijn bijhorende coëfficiënt λ_i

$$v_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j v_j + \sum_{j=i+1}^k \lambda_j v_j}{\lambda_i}$$

bij gevolg is D lineair afhankelijk of niet vrij

■

Definitie 3.22

Voor een gegeven vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ noemen we een deelverzameling D van V **voortbrengend** als en slechts als $vct(D) = V$. Men zegt ook soms dat in dat geval D **opgespannen** wordt door D . Als er een eindige deelverzameling D bestaat die V voortbrengt, dan noemen we de vectorruimte V eindig voortgebracht.

Definitie 3.23

In een vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ is een deelverzameling β een **basis** (van V) als en slechts als β voortbrengend en vrij is.

Als $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ eindig is, zeggen we ook dat $v_1, \dots, v_n$ een basis is van V .

Stelling 3.24 (Lemma van Steinitz)

Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte en $A = \{x_1, \dots, x_m\}$ een deelverzameling met m vectoren uit V . Dan geldt als A voortbrengend is voor V , dan is elke verzameling met meer dan m elementen van V lineair afhankelijk.

Dit is equivalent met: als A vrij is, dan is elke verzameling met minder dan m vectoren niet meer voortbrengend voor V .

B

Neem een willekeurige deelverzameling $B = \{y_1, \dots, y_n\}$ van V met $n > m$ dan kunnen we voor elke $i = 1, \dots, n$; y_i schrijven als een lineaire combinatie van vectoren uit A zodat

$$y_i = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} x_j$$

als we nu onderzoeken of B al dan niet vrij is dan geldt voor zekere coëfficiënten $\mu_i \in \mathbb{R}$ dat

$$\sum_{i=1}^n \mu_i y_i = \mu_1 \sum_{j=1}^m \lambda_{1j} x_j + \dots + \mu_n \sum_{j=1}^m \lambda_{nj} x_j = 0$$

om te bepalen of B al dan niet vrij is moeten we dus een stelsel van n vergelijkingen met m onbekenden oplossen, zodat uit $n > m$ volgt dat het stelsels oneindig veel oplossingen heeft en de oplossing $(0, 0, \dots, 0)$ dus uitgesloten is. Bij gevolg is B niet vrij

■

Gevolg 3.25

Als $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte is die een basis heeft met n vectoren, dan heeft elke andere basis van V ook n vectoren.

B

Stel dat β_1 een basis is met n vectoren en dat β_2 ook een basis is. Omdat β_1 voortbrengend is moet het aantal elementen van β_1 kleiner of gelijk zijn aan het aantal elementen in β_2 . Als we nu de rollen omdraaien stellen we vast dat het aantal elementen in β_2 kleiner of gelijk moet zijn aan β_1 .

$$n \leq m \text{ en } m \leq n \rightarrow n = m$$

Definitie 3.26

Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een (niet-triviale) vectorruimte. Als V een eindige basis heeft noemt het aantal elementen van die basis de **dimensie** van V , genoteerd als $\dim_{\mathbb{R}} V$ of kortweg $\dim V$. Als V geen eindige basis heeft zeggen we dat V oneindigdimensionaal is. We spreken af dat de triviale vectorruimte $\{0\}$ dimensie 0 heeft. ■

Stelling 3.28

Veronderstel dat $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte is van dimensie n . Dan geldt:

1. elke vrije verzameling van V kan uitgebreid worden tot een basis van V ;
2. elke eindige voortbrengende verzameling van V kan (door het schrappen van vectoren) gereduceerd worden tot een basis van V ;

B

1. Veronderstel dat $D = \{v_1, \dots, v_k\}$ een vrije deelverzameling van V met k elementen is. Dan is $k \leq n$. Neem een willekeurige vector v_{k+1} , indien er één bestaat, die niet voortgebracht wordt door D . We voegen deze vector toe aan D zodat $D \cup \{v_{k+1}\}$ vrij is, dit door het feit dat v_{k+1} geen lineaire combinatie is alsook D vrij is.

Dit proces herhalen we totdat $D \cup \{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ n elementen bevat, omwille van het Lemma van Steinitz is de volgende willekeurige vector v_{n+1} afhankelijk van $D \cup \{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ bij gevolg is dit dus een basis.

2. Veronderstel dat V wordt voortgebracht door $S = \{w_1, \dots, w_r\}$. We beweren nu dat er een deelverzameling van S bestaat die een basis is van V . We mogen veronderstellen dat alle $w_i \neq 0$.

We overlopen nu in volgorde de vectoren $w_1, \dots, w_r$ en schrappen alle w_i die lineair afhankelijk is van zijn voorgangers in de rij.

We noteren de overgebleven vectoren als $B (\subset S)$ en verifiëren of B een basis is voor V .

- B is voortbrengend: elke vector in V is een lineaire combinatie van $w_1, \dots, w_r$. Door de door ons gevolgde werkwijze blijkt dat w_i een lineaire combinatie is van de vectoren in B . Dus is elke vector in V een lineaire combinatie van de vectoren in B .
- B is vrij: door de door ons gevolgde werkwijze bevat B geen enkele vector die een lineaire combinatie is van andere vectoren in V .

Eigenschap 3.31

Zij V een n -dimensionale vectorruimte. Dan

1. n lineaire onafhankelijke vectoren in V vormen een basis van V ;
2. n voortbrengende vectoren in V vormen een basis van V ;

B

1. Zij B de verzameling van n lineaire onafhankelijke vectoren in V , dan kunnen we de verzameling B uitbreiden tot een basis van B , echter volgt uit het Lemma van Steinitz dat de uitgebreide verzameling van B lineair afhankelijk is, dus is B een basis van V .
2. Zij C de verzameling van n voortbrengende vectoren in V , dan kunnen we C reduceren tot een basis van V , echter volgt uit de equivalentie van het Lemma van Steinitz dat de uitgedunde verzameling van C niet voortbrengend is, dus is C een basis van V . ■

Stelling 3.32

Zij V een n -dimensionale vectorruimte en $v_1, \dots, v_n \in V$

Dan is $\{v_1, \dots, v_n\}$ een basis van V

$\leftrightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ is een vrij deel van V ;

$\leftrightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ is een voortbrengend deel van V ;

Stelling 3.33

Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte en $\beta \subset V$. Dan zijn de volgende beweringen equivalent:

1. β is een basis van V ;
2. β is maximaal vrij (d.w.z. β is vrij en elke verzameling van V die β strikt omvat is niet meer vrij);
3. β is minimaal voortbrengend (d.w.z. elke strikte deelverzameling van β is niet meer voortbrengend voor V)

B

1. We veronderstellen dat β een basis is van V , dan geldt voor elke $v \in \beta$ dat v lineair onafhankelijk is en dat voor elke $w \in V$ en $w \notin \beta$, w lineair afhankelijk is van β , bij gevolg is β maximaal vrij.
Er geldt ook dat voor de deelverzameling α van β dat α niet voortbrengend is voor β en dus voor V omdat β vrij is, bij gevolg is β minimaal voortbrengend.
2. We veronderstellen dat β maximaal vrij is en onderzoeken of β voortbrengend is. M.a.w. $v \in \langle \beta \rangle$ voor elke $v \in V$.
 - $v \in \beta$ dan is zeker $v \in \langle \beta \rangle$
 - $v \notin \beta$ dan is $\beta \cup \{v\}$ niet vrij en bestaat er dus een lineaire combinatie van $\beta \cup \{v\}$
 $\lambda v + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k = 0$
met $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k \in \beta$
Hierbij moet $\lambda \neq 0$ want β is vrij dus $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.
We kunnen v dus schrijven als een lineaire combinatie van β en bij gevolg is $v \in \langle \beta \rangle$.
3. We veronderstellen dat β minimaal voortbrengend is en onderzoeken of β vrij is.
Indien we de vectoren w_i in $\beta = \{w_1, \dots, w_k\}$ die een lineaire combinatie zijn van de andere vectoren in β schrappen dan bekomen we een vrije verzameling, echter is β minimaal voortbrengend en zodra we de vectoren w_i schrappen uit β krijgen we dat $w_i \notin \beta$ maar wel $w_i \in V$, doordat β minimaal voortbrengend is kan w_i niet worden voortgebracht, dus is β vrij.

■

Stelling 3.34

Zij V een eindigdimensionale vectorruimte en U een deelruimte van V . Dan geldt:

1. U is eindig voortgebracht en $\dim U \leq \dim V$;
2. $\dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V$;

B

1. Als $U = \{0\}$, dan is de bewering evident.
Als $U \neq \{0\}$ nemen we een $u_1 \neq 0$ in U en voegen we telkens een vector u_i toe die niet lineair afhankelijk is van $u_1, \dots, u_{i-1}$ totdat we een maximaal vrij deel $\{u_1, \dots, u_k\}$ hebben. Dit proces met inderdaad stoppen, meer specifiek bij een k die voldoet aan $1 \leq k \leq \dim V$, want lineaire onafhankelijke vectoren in U zijn ook lineair onafhankelijk in V .
Wegens de equivalentie van een maximaal vrij deel is $\{u_1, \dots, u_k\}$ een basis van U en is inderdaad $\dim U \leq \dim V$.
2. We nemen een basis $\{u_1, \dots, u_k\}$ van U en weten dat alle vectoren $u_1, \dots, u_k$ vrij zijn in U en bij gevolg vrij zijn in V , doordat de basis van U evenveel vectoren bevat als de basis van V is ook $u_1, \dots, u_k$ maximaal vrij voor V , bij gevolg is het een basis van V en wordt V door dezelfde basis opgespannen als U en is dus $U = V$.

■

Stelling 3.36

Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte en veronderstel dat $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ een basis van V . Dan kan elke vector v op een unieke manier als lineaire combinatie van de basisvectoren uitgedrukt worden. Er ontstaat derhalve een afbeelding

$$co_\beta: V \rightarrow \mathbb{R}^n : v \rightarrow co_\beta(v)$$

die v afbeeldt op het stelsel coëfficiënten dat correspondeert met v ten opzichte van de basis β . Deze afbeelding noemen we de *coördinatenafbeelding* bepaald door β

[B]

We bewijzen de uniciteit van de afbeelding.

Omdat β voortbrengend is, is elke vector v van V te schrijven als een lineaire combinatie.

Veronderstel dat we dit op twee wijzen zouden kunnen, m.a.w.

$$v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$$

dan volgt dat

$$(a_1 - b_1)e_1 + \dots + (a_n - b_n)e_n = 0$$

Door het feit dat β vrij is volgt dat $a_i - b_i = 0$ zodat $a_i = b_i$ voor alle i .

Er ontstaat dus een goed gedefinieerde afbeelding

$$co_\beta: V \rightarrow \mathbb{R}^n : v \rightarrow co_\beta(v) = (a_1, \dots, a_n)$$

■

Stelling 3.39

Als de vectorruimte V eindigdimensionaal is, dan geldt voor willekeurige deelruimten U en W van V dat

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$$

[B]

Zij $\dim U = r$, $\dim W = s$ en $\dim(U \cap W) = t$.

Aangezien $U \cap W$ een deelruimte is van zowel U als W zal $t \leq r$ en $t \leq s$.

We nemen een basis $\beta = \{v_1, \dots, v_t\}$ van $(U \cap W)$ en breiden deze uit tot een basis van U ,

$\beta_U = \{v_1, \dots, v_t, u_{t+1}, \dots, u_r\}$ en breiden β ook uit tot een basis van W ,

$\beta_W = \{v_1, \dots, v_t, w_{t+1}, \dots, w_s\}$.

We tonen nu aan dat $\beta_U \cup \beta_W = \{v_1, \dots, v_t, u_{t+1}, \dots, u_r, w_{t+1}, \dots, w_s\}$ een basis is van $U + W$

○ lineair onafhankelijk?

Neem een willekeurige lineaire combinatie van de basisvectoren die de nulvector oplevert

$$\sum_{i=1}^t x_i v_i + \sum_{j=t+1}^r y_j u_j + \sum_{k=t+1}^s z_k w_k = 0$$

merk op dat de vector $\sum_{k=t+1}^s z_k w_k \in W$ te schrijven is als $-\sum_{i=1}^t x_i v_i - \sum_{j=t+1}^r y_j u_j \in U$, bijgevolg $\in U \cap W$.

Logischer wijze zien we in dat alle y_j en z_k gelijk zijn aan nul, uit het feit dat $\sum_{i=1}^t x_i v_i$ een basis is van $U \cap W$ volgt dat alle x_i gelijk zijn aan nul zodat $\beta_U \cup \beta_W$ onafhankelijk is.

○ voortbrengend?

Per definitie van de som van deelruimten is $\beta_U \cup \beta_W$ voortbrengend.

■

Stelling 3.42

We veronderstellen dat de vectorruimte V eindigdimensionaal is. Zij $U_1, \dots, U_k$ deelruimten van V zodat $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$. Als voor elke i de verzameling $\beta_i (\subset U_i)$ een basis is van U_i , dan is $\cup_{i=1}^k \beta_i$ een basis van V en

$$\dim V = \sum_{i=1}^k \dim U_i$$

B

Per definitie van de som van deelruimten is $\cup_{i=1}^k \beta_i$ een voortbrengend deel van V . We bewijzen nu dat $\cup_{i=1}^k \beta_i$ vrij is.

Zij $\beta_i = \{v_1^{(i)}, \dots, v_{m_i}^{(i)}\}$ voor $i = 1, \dots, k$. Stel dat

$$\sum_{j=1}^{m_1} \lambda_j^{(1)} v_j^{(1)} + \dots + \sum_{j=1}^{m_k} \lambda_j^{(k)} v_j^{(k)} = 0$$

met alle $\lambda_j^{(i)} \in \mathbb{R}$. Omdat V de directe som is van de U_i , is de nulvector 0 op slechts één manier te schrijven als de som van telkens een element in $U_1, \dots, U_k$. Maar zowiezo is 0 te schrijven als $0 = 0 + \dots + 0$ waarbij elke 0 in het rechterlid beschouwd wordt als behorende tot respectievelijk $U_1, \dots, U_k$. Dus kunnen we besluiten dat

$$\sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j^{(i)} v_j^{(i)} = 0 \text{ voor elke } i = 1, \dots, k$$

En omdat β_i een basis is voor U_i moeten dan alle $\lambda_j^{(i)} = 0$.

Omdat de unie $\cup_{i=1}^k \beta_i$ een disjuncte functie is (en dus $\cap_{i=1}^k \beta_i = \emptyset$), volgt nu ook dat $\dim V = \sum_{i=1}^k \dim U_i$. ■

Definitie 3.43

In de vectorruimte V is de deelruimte W een **supplementaire deelruimte** van de deelruimte U als $V = U \oplus W$.

Stelling 3.46

Als de vectorruimte V eindigdimensionaal is, dan heeft elke deelruimte van V een supplementaire deelruimte.

B

Zij U een deelruimte van V . Neem een basis $\{u_1, \dots, u_k\}$ van U . Deze kan worden uitgebreid tot een basis $\{u_1, \dots, u_k, w_{k+1}, \dots, w_r\}$ van V en dan is $W = \{w_{k+1}, \dots, w_r\}$ een supplementaire deelruimte van U . ■

3.3 Vectorruimten geassocieerd aan een matrix

Definitie 3.47

Zij

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

een $(m \times n)$ -matrix met elementen in $\mathbb{R}$. Elke rij r_i behoort dan tot $\mathbb{R}^n$; elke kolom c_j behoort tot $\mathbb{R}^m$. We definiëren de volgende vectorruimten:

1. $R(A) = \text{vct}\{r_1, \dots, r_m\}$, de **rijruimte** van A ;
2. $C(A) = \text{vct}\{c_1, \dots, c_n\}$ de **kolomruimte** van A ;
3. $N(A) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot X = 0\}$, de **nulruimte** van A

De dimensie van de rijruimte van A noemt men de *rijrang* van A .

De dimensie van de kolomruimte van A noemt men de *kolomrang* van A .

Stelling 3.50

Veronderstel dat U de rijgereduceerde matrixvorm van A (of een willekeurige trapvorm verkregen uit A door Gauss-eliminatie). Dan geldt:

1. $N(A) = N(U)$;
2. $R(A) = R(U)$;

Bovendien geldt dat

$$\dim N(A) + \dim R(A) = n$$

wat in woorden uitgedrukt betekent:

aantal kolommen van de matrix A = dimensie van de nulruimte van A + rijrang van A

B

We weten uit hoofdstuk 1 dat de oplossingsverzameling van het stelsel $A \cdot X = 0$ gelijk is aan die van het stelsel $U \cdot X = 0$. Dit betekent dat $N(A) = N(U)$.

De matrix U ontstaat uit A door elementaire rijoperaties. Elk van de drie ERO's verandert de rijruimte van een matrix niet en daardoor geldt $R(A) = R(U)$.

Nu geldt dat $\dim R(U)$ gelijk is aan het aantal niet-nulrijen in U , of dus het aantal leidende énen in U . Anderzijds is $\dim N(U)$ gelijk aan het aantal vrije variabelen van het stelsel $U \cdot X = 0$. Nu weten we uit wat we leerden bij het oplossen van stelsels dat het aantal basisvariabelen plus het aantal vrije variabele gelijk is aan het totaal aantal variabelen, dat n is.

■

Stelling 3.51

Veronderstel dat A en B matrices zijn, van dergelijke afmetingen zó dat het product $A \cdot B$ bepaald is. Dan geldt:

1. $N(A \cdot B) \supseteq N(B)$;
2. $C(A \cdot B) \subseteq C(A)$;
3. $R(A \cdot B) \subseteq R(B)$;

B

1. Stel dat $X \in N(B)$, dan geldt dat $B \cdot X = 0$, en bijgevolg is ook $(A \cdot B) \cdot X = A \cdot (B \cdot X) = 0$.
2. Als we $B = (b_1, \dots, b_k)$ noteren, m.a.w. met kolommen b_i , dan is het interessant om op te merken dat $A \cdot B = (Ab_1, \dots, Ab_k)$; de kolommen in $A \cdot B$ zijn dus van de vorm Ab_i . Nu is elke Ab_i een lineaire combinatie van de kolommen van A , zoals we hiervoor reeds opmerkten. Vektoren in de kolomruimte $A \cdot B$ zijn dus lineaire combinaties van lineaire combinaties van kolommen van A , en behoren daarom tot de kolomruimte van A .
3. Tot slot vinden we ook dat

$$R(A \cdot B) = C((A \cdot B)^T) = C(B^T \cdot A^T) \subseteq C(B^T) = R(B)$$

■

Praktische aspecten

- a. basis van de nulruimte

Als er geen vrije variabelen zijn, is de oplossingsverzameling van het stelsel $A \cdot X = 0$ of gelijkaardig $U \cdot X = 0$ gelijk aan $\{0\}$. In dat geval is de basis van $N(A)$ gelijk aan $\emptyset$.

Als er vrije variabelen zijn, vindt men een basis voor $N(A)$ door elke vrije variabele achtereenvolgens waarde 1 te geven en de andere gelijk te stellen aan 0.

Zo is van de matrix A na rijreductie in de vorm

$$U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 & 0 & u_{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & u_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & u_{35} \end{pmatrix}$$

de oplossingsverzameling gelijk aan

$$\{(1 - u_{12}x_2 - u_{15}x_5, x_2, 1 - u_{25}x_5, 1 - u_{35}x_5, x_5 | x_2, x_5 \in \mathbb{R})\}$$

We stellen nu $x_2 = 1$ en $x_5 = 0$ en andersom $x_2 = 0$ en $x_5 = 1$ zodat we respectievelijk volgende basis krijgen

$$\{(1 - u_{12}, 1, 0, 0, 0), (1 - u_{15}, 0, 1 - u_{25}, 1 - u_{35}, 1)\}$$

- b. basis van de rijruimte van een matrix

De rijruimte van een matrix A is dezelfde als van de rijgereduceerde matrix U van A.

De niet nulrijen in de rijgereduceerde matrix zijn evident vrij en voortbrengend en vormen dus een basis voor $R(A) = R(U)$.

Het volstaat dus de matrix te rijreducen om een basis voor de rijruimte te bepalen.

4. Lineaire afbeelding en transformatie

4.1 Definitie

Definitie 4.1

Veronderstel dat $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ twee vectorruimten zijn. Een afbeelding $L: V \rightarrow W$ noemen we **een lineaire afbeelding** als en slechts als

1. $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$ voor alle $v_1, v_2 \in V$;
2. $L(\lambda v) = \lambda L(v)$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ en voor alle $v \in V$;

Anders gezegd is een afbeelding lineair als ze 'compatibel is met de twee bewerkingen in een vectorruimte'.

Een **lineaire transformatie** is een lineaire afbeelding van een vectorruimte naar zichzelf.

Een lineaire afbeelding $(\mathbb{R}, V, +) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{R}, +)$ wordt een **lineaire vorm** genoemd.

Lemma 4.2

Een afbeelding $L: V \rightarrow W$ tussen reële vectorruimten is een lineaire afbeelding als en slechts als

$$L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2)$$

voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ en voor alle $v_1, v_2 \in V$.

(Met andere woorden: lineaire afbeeldingen 'bewaren' lineaire combinaties.)

B

$\rightarrow$

Zij L een lineaire afbeelding en $v'_1 = \lambda_1 v_1 \in V$ en $v'_2 = \lambda_2 v_2 \in V$ dan geldt dat

$$L(v'_1 + v'_2) = L(v'_1) + L(v'_2) = L(\lambda_1 v_1) + L(\lambda_2 v_2) = \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2)$$

■

Gevolg 4.3

Als $L: V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding is dan geldt dat

1. $L(0) = 0$ en $L(-v) = -L(v)$ voor elke vector $v \in V$;
2. $L(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i L(v_i)$ voor alle $\lambda_i \in \mathbb{R}$ en voor alle $v_i \in V$;

Opmerking: een lineaire afbeelding ligt dus volledig vast door de beelden van een basis.

B

1. Uit de lineariteit volgt dat $L(0) = L(0 + 0) = L(0) + L(0)$ en dus moet $L(0) = 0$. Dan volgt voor elke $v \in V$ dus dat $L(v + (-v)) = L(0) = 0$ maar alsook dat $L(v + (-v)) = L(v) + L(-v)$, bijgevolg is $L(-v) = -L(v)$
2. Dit volgt dadelijk uit de definitie van een lineaire afbeelding.

■

4.2 Lineaire afbeeldingen en matrices

Matrixvoorstelling

Onderstel dat $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ eindigdimensionale vectorruimten zijn met respectievelijk basissen $\beta_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ en $\beta_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ dan zien we in dat $\dim V = n$ en $\dim W = m$.

We weten dat iedere vector $v \in V$ ($w \in W$) uniek en ondubbelzinnig gekend is door zijn coördinaatvector $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (respectievelijk $(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$) ten opzichte van de basis van hun vectorruimte.

Dit kunnen we ook noteren als

$$v = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Zij $L: V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding dan geldt

$$L(v) = x_1 L(v_1) + \dots + x_n L(v_n) = (L(v_1), \dots, L(v_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

zodat de beelden van de basisvectoren in β_V het beeld van elke $v \in V$ volledig bepaald.

Elk beeld van een basisvector in β_V is een vector in W en kan dus in functie van β_W in een coördinaatvector $(a_{1i}, \dots, a_{mi})$ worden uitgedrukt.

Voor elke $i = 1, \dots, n$ geldt dat

$$L(v_i) = (w_1, \dots, w_m) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

samengevat voor het beeld van de basis β_V geeft dit

$$(L(v_1), \dots, L(v_n)) = (w_1, \dots, w_m) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

De $(m \times n)$ -matrix A bevat dus alle informatie van de lineaire afbeelding L , t.o.v. de basissen β_V en β_W . Men noteert deze matrix als $L_{\beta_V}^{\beta_W}$.

Merk op dat het aantal kolommen bepaald wordt door de dimensie van V en het aantal rijen door de dimensie van W .

We kunnen nu het beeld voor elke $v \in V$ schrijven als

$$L(v) = (L(v_1), \dots, L(v_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (w_1, \dots, w_m) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

De coördinaatvector van $L(v)$ ten opzichte van β_W is dus

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Op het niveau van coördinaten kunnen we de lineaire afbeelding L interpreteren als

$$L \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ of kortweg } L(X) = A \cdot X$$

samengevat:

$$L(v) = \underbrace{(w_1, \dots, w_m)}_{\beta_W} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\substack{co_{\beta_W}(L(v_1), \dots, L(v_n)) = co_{\beta_W}(L(\beta_V)) \\ co_{\beta_V}(v)}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{co_{\beta_V}(v)}$$

Propositie 4.9

Zij V en W vectorruimten

1. Als f en g lineaire afbeeldingen $V \rightarrow W$ zijn, dan is

$$f + g: V \rightarrow W : (f + g)(v) \rightarrow f(v) + g(v)$$

nog steeds een lineaire afbeelding.

Analoog is voor elke $\lambda \in \mathbb{R}$ de afbeelding $\lambda f: V \rightarrow W : (\lambda f)(v) \rightarrow \lambda f(v)$ eveneens lineair.

2. De verzameling van alle lineaire afbeeldingen van V naar W wordt met deze optelling en scalaire vermenigvuldiging zelf een reële vectorruimte.

B

1. Voor elke $v_1, v_2 \in V$ geldt dat

$$\begin{aligned} (f + g)(v_1 + v_2) &= f(v_1 + v_2) + g(v_1 + v_2) \\ &= f(v_1) + f(v_2) + g(v_1) + g(v_2) \\ &= (f + g)(v_1) + (f + g)(v_2) \end{aligned}$$

voor elke $v \in V$ en $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$(\lambda_1 f)(\lambda_2 v) = \lambda_1 f(\lambda_2 v) = \lambda_1 \lambda_2 f(v)$$

bij gevolg is $f + g$ lineair. ■

Definitie 4.10

Als $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ vectorruimten zijn, dan noteren we $Hom(V, W)$ voor de vectorruimte van alle lineaire afbeeldingen van V en W .

Stelling 4.11

Zij V en W eindigdimensionale vectorruimten van dimensie respectievelijk n en m . Na basiskeuze in V en W is de vectorruimte van de lineaire afbeeldingen van V naar W , namelijk $Hom(V, W)$, in bijectief verband met de vectorruimte van de matrices $\mathbb{R}^{m \times n}$. Bij dit verband correspondeert de optelling van lineaire afbeeldingen met de optelling van matrices, en evenzo voor het product met een scalar.

Stelling 4.12

De samenstelling van twee lineaire afbeeldingen is opnieuw een lineaire afbeelding.

B

Zij $K: U \rightarrow V$ en $L: V \rightarrow W$ dan is

$$\begin{aligned} (L \circ K)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= L(K(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)) \\ &= L(\lambda_1 K(v_1)) + L(\lambda_2 K(v_2)) \\ &= \lambda_1 L(K(v_1)) + \lambda_2 L(K(v_2)) \\ &= \lambda_1 (L \circ K)(v_1) + \lambda_2 (L \circ K)(v_2) \end{aligned}$$

voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ en voor alle $v_1, v_2 \in V$; bijgevolg is $L \circ K$ lineair ■

Opmerking

Zij $(\mathbb{R}, U, +)$, $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ eindig dimensionale vectorruimten met dimensies respectievelijk m , n en p . Kies respectievelijk basissen β_U, β_V en β_W .

Veronderstel dat $K: U \rightarrow V$ en $L: V \rightarrow W$ lineaire afbeeldingen zijn dan komt de matrix van de lineaire afbeelding overeen met respectievelijk $K_{\beta_U}^{\beta_V} = A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ en $L_{\beta_V}^{\beta_W} = B \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

Wanneer een willekeurige $u \in U$ uitgedrukt wordt met behulp van zijn coördinaatvector X , dan geldt dat

$K(u)$ als coördinaatvector $A \cdot X$ heeft en dus dat

$(L \circ K)(u)$ als coördinaatvector $B \cdot (A \cdot X) = (B \cdot A) \cdot X$ heeft.

De samengestelde afbeelding $L \circ K$ heeft dus een matrix voorstelling

$$(L \circ K)_{\beta_U}^{\beta_W} = B \cdot A \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

Definitie 4.14

Als $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ vectorruimten zijn, dan noemen we een afbeelding $L: V \rightarrow W: v \rightarrow L(v)$ een **isomorfisme** als en slechts als L bijectief (bij iedere v hoort slechts één $L(v)$ en vice versa) is en lineair.

In dat geval noemen we de vectorruimten V en W **isomorf** en noteren we $V \cong W$

Stelling 4.15

Stel dat $L: V \rightarrow W$ een bijectieve lineaire afbeelding is. Dan is haar inverse afbeelding $K: W \rightarrow V$ ook een lineaire afbeelding.

B

Uiteraard is ook K een bijectie. We moeten aantonen dat K lineair is.

Neem willekeurige elementen $w_1, w_2 \in W$ en $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Omdat $L \circ K = \text{Id}_W$ volgt dat

$$\begin{aligned} L(K(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)) &= \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 L(K(w_1)) + \lambda_2 L(K(w_2)) \\ &= L(\lambda_1 K(w_1)) + L(\lambda_2 K(w_2)) \end{aligned}$$

en dus, omdat L injectief is, dat

$$K(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 K(w_1) + \lambda_2 K(w_2)$$

■

Gevolg 4.16

Als $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ eindigdimensionale vectorruimten zijn, en de lineaire afbeelding L , ten opzichte van gekozen basissen in V en W , voorgesteld door een matrix A , dan is L een isomorfisme als en slechts als de matrix A inverteerbaar is, en bijgevolg ook vierkant.

Dus in dat geval hebben V en W dezelfde dimensie

$$V \cong W \leftrightarrow \dim V = \dim W$$

Omgekeerd, als V en W dezelfde dimensie hebben, en er wordt in elke vectorruimte een basis gekozen, respectievelijk β_V en β_W , elk dus met evenveel elementen, dan is de afbeelding bepaald door een willekeurige inverteerbare matrix A (ten opzichte van de basissen) een isomorfisme tussen V en W .

B

$\rightarrow$

Zij V en W vectorruimten met basissen β_V en β_W en $L: V \rightarrow W$ een lineaire transformatie met matrix $A = L_{\beta_V}^{\beta_W}$.

Als L een isomorfisme is dan weten we dat L bijectief is zodat L en dus ook A inverteerbaar zijn.

De matrix A is enkel en alleen inverteerbaar als A een vierkante matrix is; dus is $\dim V = \dim W$.



Zij V en W vectorruimten met basissen β_V en β_W en A een inverteerbare vierkante matrix. Dan weten we dat de lineaire afbeelding L die bij A hoort inverteerbaar is. Bijgevolg is L bijectief en dus per definitie een isomorfisme.

■

4.3 Invloed van het veranderen van basis

Basisverandering

Zij V een vectorruimte met basissen β en β' dan kunnen we de matrix van basisverandering $Id_{\beta}^{\beta'}$ opstellen zodat voor elke $v \in V$ met coördinaten $(x_1, \dots, x_n)^T$ ten opzichte van β zijn coördinaten ten opzichte van β' geschreven kunnen worden als $(x'_1, \dots, x'_n)^T$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = Id_{\beta}^{\beta'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

algemeen:

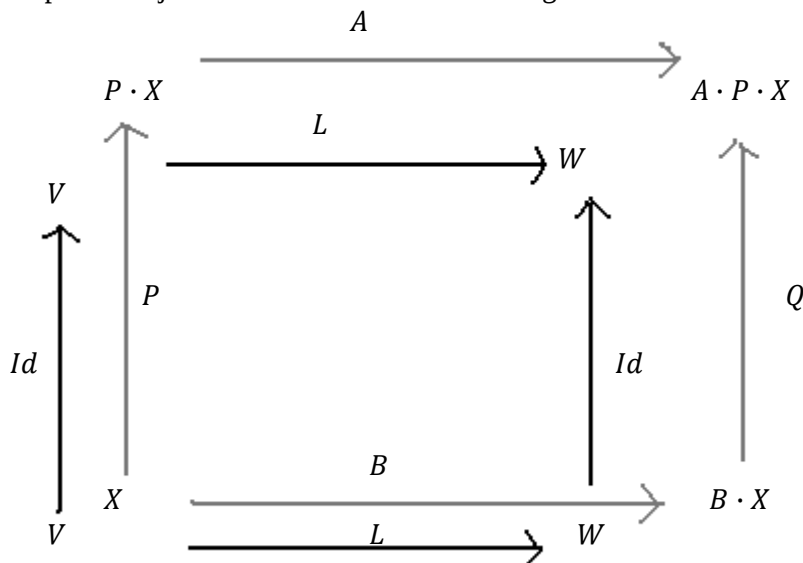
$$Id_{\beta}^{\beta'} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{co_{\beta'}(\beta)}$$

Invloed van basisverandering

- op de matrix van een lineaire afbeelding
Veronderstel dat $L: V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding is ten opzichte van gekozen basissen β_V en β_W voorgesteld wordt door de matrix A .

Anderzijds kiezen we in zowel V als in W nieuwe basissen respectievelijk β'_V en β'_W . De lineaire afbeelding L wordt dan ten opzichte van deze basissen voorgesteld door de matrix B .

Doordat we zowel in V als W van basis veranderen krijgen we de matrices P en Q respectievelijk de matrix van basisverandering van V en W .



de matrices A en B zijn dus verbonden door

$$B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$$

- op de matrix van een lineaire transformatie
Dit is een speciaal geval van het bovenstaande waarin $L: V \rightarrow V$ en er slechts één matrix van basisverandering P is.

We zien op een gelijkaardige wijze in dat B en A nu verbonden zijn door $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$

Definitie 4.20

Twee vierkante matrices A en B ($\in \mathbb{R}^{n \times n}$) noemen we gelijkvormig als en slechts als er een inverteerbare matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bestaat zo dat

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Gevolg 4.21

De matrix van een lineaire transformatie wordt door een verandering van basis in V omgezet in een gelijkvormige matrix.

4.4 Deelruimten bepaald door lineaire afbeeldingen en de dimensiestelling

Definitie 4.23

Zij $L: (\mathbb{R}, V, +) \rightarrow (\mathbb{R}, W, +)$ een lineaire afbeelding.

De **kern** van L , $\ker(L)$ genoteerd, is de deelruimte

$$\ker(L) = \{v \in V \mid L(v) = 0\}$$

Het **beeld** van L , $Im(L)$ genoteerd, is de deelruimte

$$Im(L) = \{w \in W \mid \text{er bestaat een } v \in V \text{ waarvoor } L(v) = w\}$$

De dimensie van $Im(L)$ noemen we de **rang** van L .

Stelling 4.25

Zij $L: V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding. Dan geldt dat

$$L \text{ injectief is als en slechts als } \ker(L) = \{0\}$$

(Herhaal: L is injectief als en slechts als twee verschillende elementen van V ook een verschillend beeld onder L hebben, dus mag enkel 0 op 0 worden afgebeeld en is $\ker(L) = \{0\}$)

[B]

[→]

Zowiezo is $0 \in \ker(L)$. Stel $v \in V$ behoort tot de kern, dit wil zeggen $L(v) = 0 = L(0) \rightarrow v = 0$ zodat $\ker(L) = \{0\}$.

[←]

We weten dat $\ker(L) = \{0\}$, neem dan $v, v' \in V$ zodat

$$L(v) = L(v') \leftrightarrow L(v) - L(v') = 0 \leftrightarrow L(v - v') = 0$$

dus is $v - v' = 0 \leftrightarrow v = v'$ bij gevolg is L injectief.

■

Stelling 4.27 (Dimensiestelling van Lineaire algebra)

Voor een lineaire afbeelding $L: V \rightarrow W$ waarbij V een eindig dimensionale vectorruimte is geldt dat

$$\dim V = \dim \ker(L) + \dim Im(L)$$

[B]

Omdat de kern van L een deelruimte is van V , is de dimensie van de kern ook eindig.

Kies een basis $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ van de kern en vul deze aan tot een basis van V :

$$\beta_V = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$$

We weten dat $\text{Im}(L) = \text{vct}\{L(v_1), \dots, L(v_r), L(v_{r+1}), \dots, L(v_n)\}$ en we weten dat $L(v_{r+1}) = \dots = L(v_n) = 0$ zodat $\text{Im}(L) = \text{vct}\{L(v_1), \dots, L(v_r)\}$

We beweren nu dat de verzameling $\{L(v_1), \dots, L(v_r)\}$ vrij is.

Stel voor een zekere $x_i \in \mathbb{R}$ dat

$$0 = x_1 L(v_1) + \dots + x_r L(v_r) = L(v_{r+1}, \dots, v_n)$$

dan volgt dat $x_1 v_1, \dots, x_r v_r \in \ker(L)$ en dus dat we $x_1 v_1, \dots, x_r v_r$ kunnen schrijven als een lineaire combinatie van de basisvectoren van de basis van kern zodat

$$x_1 v_1 + \dots + x_r v_r = \lambda_{r+1} v_{r+1} + \dots + \lambda_n v_n$$

voor zekere $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Omdat $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ een basis is van V , volgt hieruit dat

$$x_1 = \dots = x_r = \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$$

We concluderen dat $\{L(v_1), \dots, L(v_r)\}$ een basis is van $\text{Im}(L)$. Hieruit volgt de stelling. ■

Stelling 4.30

Zij V en W eindigdimensionale vectorruimten en $L: V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding. Dan bestaat er een basis in V en een basis in W zodat de matrix van L , t.o.v. deze basissen gegeven is door een matrix van de vorm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hierin is r de rang van de lineaire afbeelding L

anders gezegd:

Zij $\beta_V = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ een basis van V en β_W een basis van W zo gekozen zodat de matrix van $L: V \rightarrow W$ gegeven is door een matrix van de vorm zoals in bovenstaande stelling weergegeven.

Zij $\text{vct}\{L(v_1), \dots, L(v_r)\} = \text{Im}(L)$ en $\text{vct}\{v_{r+1}, \dots, v_n\} = \ker(L)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{\text{co}_{\beta_W}(L(v_1, \dots, v_r))}_{(0, \dots, 0)^T} & \underbrace{\text{co}_{\beta_W}(L(v_{r+1}, \dots, v_n))}_{(0, \dots, 0)^T} \end{pmatrix}$$

Hierin is $\dim \text{Im}(L) = r$ zodat $\dim \ker(L) = n - r$ en $\dim V = n$.

Gevolg 4.31

Als $L: V \rightarrow W : v \rightarrow L(v)$ een lineaire transformatie is van de eindigdimensionale vectorruimte V , dan geldt

$$L \text{ is injectief} \leftrightarrow L \text{ is surjectief} \leftrightarrow L \text{ is bijectief}$$

B

De injectiviteit van L impliceert dat $\ker(L) = \{0\}$. Bijgevolg is $\dim \ker(L) = 0$. Uit de dimensiestelling volgt dan dat $\dim \operatorname{Im}(L) = \dim V$ zodat $\operatorname{Im}(L) = V$ en dus is V surjectief. ■

Gevolg 4.34

Veronderstel dat A en B matrices zijn, van afmetingen zó dat $A \cdot B$ bepaald is. Dan geldt

$$\operatorname{rang} A \cdot B \leq \min\{\operatorname{rang} \text{ van } A, \operatorname{rang} \text{ van } B\}$$

Stelling 4.35

Zij $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dan zijn volgende beweringen equivalent

- voor elke $b \in \mathbb{R}^m$ is het stelsel $A \cdot X = b$ oplosbaar;
- $C(A) = \mathbb{R}^m$;
- de rang van A is gelijk aan m ;
- de rijen van A zijn lineair onafhankelijk;

Stelling 4.36

Zij $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dan zijn volgende beweringen equivalent

- voor elke $b \in \mathbb{R}^m$ heeft het stelsel $A \cdot X = b$ hoogstens één oplossing;
- $N(A) = \{0\}$;
- de rang van A is gelijk aan n ;
- de kolommen van A zijn lineair onafhankelijk;

Stelling 4.37

Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een vierkante matrix, dan zijn volgende beweringen equivalent

- A is inverteerbaar;
- $\det(A) \neq 0$;
- de rang van A is gelijk aan n ;
- de rijen van A zijn lineair onafhankelijk;
- de kolommen van A zijn lineair onafhankelijk;

Stelling 4.38 (Oplosbaarheid van een lineair probleem)

Gegeven is de lineaire afbeelding $L: (\mathbb{R}, V, +) \rightarrow (\mathbb{R}, W, +)$ die het lineair probleem ' $L(x) = w_0$ ' bepaalt. Dit lineair probleem heeft en oplossing als en slechts als $w_0 \in \operatorname{Im}(L)$

(oplosbaarheidsvoorwaarde). Veronderstel dat het probleem oplosbaar is en dat x_p een oplossing is voor ' $L(x) = w_0$ '. Dan wordt de (volledige) oplossingsverzameling gegeven door

$$x_p + \ker(L) = \{x_p + x_h \mid x_h \in \ker(L)\}$$

De dimensie van $\ker(L)$ wordt het aantal vrijheidsgraden van het lineair probleem genoemd en x_p een 'particuliere oplossing' van het probleem.

In het bijzonder is het homogeen probleem ($w_0 = 0$) steeds oplosbaar en vormt de oplossingsverzameling hiervoor de deelvectorruimte $\ker(L)$.

B

Elke vector van de vorm $x_p + x_h$ (met $x_h \in \ker(L)$) is eveneens een oplossing want

$$L(x_p + x_h) = L(x_p) + L(x_h) = w_0$$

Omgekeerd zij x een willekeurige oplossing van het probleem (m.a.w. $L(x) = w_0$). Dan kunnen we x schrijven als

$$x = x_p + (x - x_p)$$

Omdat $L(x - x_p) = L(x) - L(x_p) = w_0 - w_0 = 0$, geldt dat $x - x_p$ tot de kern van L behoort. ■

5. Eigenwaarden, eigenvectoren en diagonaliseerbaarheid

5.2 Diagonaliseerbaarheid van een lineaire transformatie

Inleiding

Veronderstel een vierkante matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die we kunnen opvatten als de matrix van de lineaire transformatie $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: x \rightarrow L_A(x) = A \cdot x$.

We vragen ons af of we door middel van een geschikte basisverandering A kunnen omvormen tot een matrix Λ gelijkvormig met A (dus van het type $P^{-1} \cdot A \cdot P$) zodat die de diagonaalmatrix is.

Laten we veronderstellen dat dit kan en er dus een matrix P bestaat die inverteerbaar is zodat $P^{-1} \cdot A \cdot P = \Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dan geldt dat

$$A \cdot P = P \cdot \Lambda = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Indien we P noteren als de rij van kolommen $P = (p_1, \dots, p_n)$ dan vinden we dat

$$(Ap_1, \dots, Ap_n) = A \cdot (p_1, \dots, p_n) = (p_1, \dots, p_n) \cdot \Lambda = (\lambda_1 p_1, \dots, \lambda_n p_n)$$

elke kolom van $p_i \in P$ voldoet aan de vergelijking van het type $AP_i = \lambda_i P_i$ of is met andere woorden een oplossing van het stelsel $(A - \lambda_i I_n) \cdot X = 0$.

Omdat P inverteerbaar is zijn de kolomvectoren van P niet gelijk aan nul. Zodat als een dergelijke matrix P bestaat, dan moet (voor elke λ_i) het stelsel $(A - \lambda_i I_n) \cdot X = 0$ een niet-nul oplossing hebben.

Dit is enkel het geval als en slechts als $\det(A - \lambda_i I_n) = 0$, met andere woorden als λ_i een nulpunt is van de vergelijking

$$\det(A - xI_n) = 0$$

die een veelterm van de graad n is.

Definitie 5.1

Veronderstel dat A een $(n \times n)$ -matrix is met reële componenten. Een niet-nulvector $v \in \mathbb{R}^n$ noemen we een **eigenvector** van A als en slechts als er een $\lambda \in \mathbb{R}$ bestaat, zo dat $A \cdot v = \lambda v$ (waarbij we v beschouwen als kolomvector).

Deze waarde λ noemen we de **eigenwaarde horende bij de eigenvector**.

De veelterm $\varphi_A(X) = \det(A - XI_n)$ noemen we de **karacteristieke veelterm** van de matrix A .

Definitie 5.3

Veronderstel dat $L: V \rightarrow V$ een lineaire transformatie is van de vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$. Een niet-nulvector $v \in V$ noemen we een **eigenvector** van L als en slechts als er een $\lambda \in \mathbb{R}$ bestaat zodat $L(v) = \lambda v$.

Deze coëfficiënt λ noemen we de **eigenwaarde** horende bij de eigenvector v van L .

Definitie 5.6

Een vierkante matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ noemen we **diagonaliseerbaar** als en slechts als A gelijkvormig is met een diagonaalmatrix.

Een lineaire transformatie $L: (\mathbb{R}, V, +) \rightarrow (\mathbb{R}, V, +)$ noemen we diagonaliseerbaar als en slechts als V een basis heeft die volledig bestaat uit eigenvectoren.

Stelling 5.7

Een vierkante matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is diagonaliseerbaar als en slechts als $\mathbb{R}^n$ een basis heeft die volledig bestaat uit eigenvectoren van A .

Stelling 5.8

Gelijkvormige matrices hebben dezelfde karakteristieke veelterm.

B

Veronderstel dat A en $B (\in \mathbb{R}^{n \times n})$ gelijkvormig zijn. Zij P een inverteerbare matrix.

Dan geldt:

$$\begin{aligned}\varphi_B &= \det(B - XI_n) = \det(P^{-1} \cdot A \cdot P - XI_n) \\ &= \det(P^{-1} \cdot (A - XI_n) \cdot P) \\ &= \det P^{-1} \cdot \det(A - XI_n) \cdot \det P \\ &= \det(A - XI_n) = \varphi_A\end{aligned}$$

■

Gevolg 5.9

De karakteristieke veelterm van de matrix van een lineaire transformatie van een eindigdimensionale vectorruimte is onafhankelijk van de gekozen basis.

Met andere woorden, alle matrixvoorstellingen van dezelfde lineaire transformatie hebben dezelfde karakteristieke veelterm.

Als $L: V \rightarrow V$ een lineaire transformatie is van de eindigdimensionale reële vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ dan noemen we de karakteristieke veelterm van eender welke matrix voorstelling van L de karakteristieke veelterm van L , genoteerd als $\varphi_L(X)$

B

Dit volgt uit het feit dat de matrixvoorstelling van dezelfde lineaire transformatie gelijkvormig zijn zodat ook hun veelterm gelijk is.

■

Intermezzo: Google PageRank[®]

Via de redeneringen op blz. 138-140 van de cursus verkrijgen we volgende formule

$$c \cdot R(p) = \sum_{q \rightarrow p} \frac{R(q)}{N(q)} + E(p)$$

waarin

- c een gekozen constante is;
- $R(p)$ de rank van pagina p is;
- $\sum_{q \rightarrow p} \frac{R(q)}{N(q)}$ de doorgegeven rank van pagina q (totale rank $R(q)$ gedeeld door het aantal links op pagina q) als en slechts als er een link is van q naar p .
- $E(p)$ startwaarde van pagina p is;

We kunnen dit weergeven met behulp van Lineaire algebra.

We beschouwen n pagina's $p_1, \dots, p_n$ als de kolomvector $R = (R(p_1), \dots, R(p_n))^T$ en definiëren de matrices A en E zodat

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{N(p_j)} \text{ als } p_j \rightarrow p_i \text{ en } E_{ij} = E(p_i) \\ 0 \text{ anders} \end{cases}$$

We eisen ook dat R genormaliseerd is, d.w.z. $\sum_{i=1}^n R(p_i) = 1$ (zie definitie 6.9), zodat we de bovenstaande formule kunnen schrijven als

$$c \cdot R = (A + E) \cdot R$$

We zien nu dat c een eigenwaarde van de matrix $A + E$ moet zijn en R een eigenvector van die matrix. De theoretische omkadering is dus: zoek een eigenwaarde en de bijbehorende eigenvector voor de matrix $A + E$ die volledig bepaald wordt door het netwerk.

5.4 Spectrum en eigenruimten van een lineaire transformatie

Definitie 5.11

Zij $L: V \rightarrow V$ een lineaire transformatie. Het **spectrum** van L is de verzameling van eigenwaarden van L .

We noteren $\text{Spec}(L)$.

Definitie 5.12

De **algebraïsche multipliciteit** van een eigenwaarde λ van een lineaire transformatie L van een eindigdimensionale vectorruimte is de multipliciteit van λ als nulpunt van de karakteristieke veelterm $\varphi_L(X)$.

We noteren $m(\lambda)$ voor deze multipliciteit.

Definitie 5.13

Zij $L: V \rightarrow V$ een lineaire transformatie en zij $\lambda \in \text{Spec}(L)$. Dan is de verzameling $\{v \in V \mid L(v) = \lambda v\}$ een deelruimte van V , die we de **eigenruimte** van de eigenwaarde λ noemen.

We noteren E_λ voor de eigenruimte van eigenwaarde λ .

Als E_λ eindigdimensionaal is noemen we $\dim E_\lambda$ de **meetkundige multipliciteit** van de eigenwaarde λ .

We noteren $d(\lambda)$ voor deze multipliciteit.

Stelling 5.15

Veronderstel dat $L: V \rightarrow V$ een lineaire transformatie is van de eindigdimensionale vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ met spectrum $\text{Spec}(L) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Dan geldt voor elke eigenwaarde λ_i

1. $m(\lambda_i) \geq 1$;
2. $d(\lambda_i) \geq 1$;
3. $d(\lambda_i) \leq m(\lambda_i)$;

B

De eerste twee beweringen zijn evident.

De derde bewering leiden we af uit volgende veronderstelling. Veronderstel $\dim E_\lambda = d(\lambda) = d$. Dan bestaat er een basis met d elementen voor E_λ namelijk $\{v_1, \dots, v_d\}$. We kunnen deze basis uitbreiden tot een basis β van V . Ten opzichte van β krijgen we dan een matrixvoorstelling van een lineaire transformatie L in de vorm van

$$L_\beta^\beta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_d & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Hieruit leid men eenvoudig af dat $\varphi_L(X)$ van de vorm $\varphi_L(X) = (X - \lambda)^d p(X)$ is, met $p(X)$ bepaalt door de elementen in de matrix L_β^β die overeenkomen met de toegevoegde elementen aan de basis van E_λ .

Nu geldt dat $d = d(\lambda) \leq m(\lambda)$

■

5.5 Diagonaliseerbaarheid

Stelling 5.17

Veronderstel dat $L: V \rightarrow V$ een lineaire transformatie is van de eindigdimensionale vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ en veronderstel dat $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ onderling verschillende eigenwaarden zijn van L , telkens met bijhorende eigenvectoren $v_1, \dots, v_k$. Dan is de verzameling eigenvectoren $\{v_1, \dots, v_k\}$ lineair onafhankelijk.

B

We bewijzen dit per inductie op k .

Als $k = 1$, dan is de verzameling $\{v_1\}$ evident lineair onafhankelijk vermits een eigenvector verschilt van de nulvector.

Veronderstel dat de verzameling van $k - 1$ elementen $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ lineair onafhankelijk is en dat we veronderstellen dat $\{v_1, \dots, v_k\}$ lineair afhankelijk is, zodat $v_k \in \text{vct}\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$.

Dan bestaat er een lineaire combinatie zodat

$$v_k = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{k-1} v_{k-1}$$

met $\mu_i \in \mathbb{R}$

Dan geldt dat

$$\begin{aligned} L(v_k) &= L(\mu_1 v_1) + \dots + L(\mu_{k-1} v_{k-1}) \\ &= \mu_1 L(v_1) + \dots + \mu_{k-1} L(v_{k-1}) \\ &= \mu_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \mu_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} \end{aligned}$$

en anderzijds dat

$$\begin{aligned} L(v_k) &= L(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_{k-1} v_{k-1}) \\ &= \lambda_k (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_{k-1} v_{k-1}) \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\lambda_k (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_{k-1} v_{k-1}) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \mu_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1}$$

of dus volgt dat

$$\mu_1 (\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \dots + \mu_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} = 0$$

Omdat $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ vrij is volgt hieruit dat alle coëfficiënten $\mu_j = 0$, dit is echter in contradictie met het feit dat v_k een eigenvector (en dus verschillend van 0) is.

Bijgevolg is $\{v_1, \dots, v_k\}$ lineair onafhankelijk.

■

Definitie 5.18

Het spectrum van een lineaire transformatie $L: V \rightarrow V$ van een vectorruimte V van dimensie n heet **enkelvoudig** als en slechts als $\#Spec(L) = n$.

(Dit betekent dat L precies n verschillende eigenwaarden heeft, elk met algebraïsche multipliciteit 1.)

Stelling 5.19

Een lineaire transformatie met een enkelvoudig spectrum is diagonaliseerbaar.

B

Omdat L enkelvoudig is, bevat de verzameling van eigenvectoren evenveel elementen als de dimensie van V . Doordat de verzameling van eigenvectoren ook lineair onafhankelijk is, is het een basis van V zodat de transformatie L diagonaliseerbaar is. ■

Lemma 5.21

Indien een lineaire transformatie L van eindigdimensionale vectorruimte V diagonaliseerbaar is, dan moet de karakteristieke veelterm van L volledig ontbinden als het product van eerstegraadsfactoren.

B

Als L diagonaliseerbaar is kunnen we een basis van V kiezen zodat de matrix van L ten opzichte van die basis een diagonaalmatrix is. Als we de karakteristieke veelterm φ_L uitrekenen met deze matrix is het duidelijk dat φ_L volledig ontbindt als product van eerstegraadsfactoren. ■

Stelling 5.22

Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte van dimensie n en zij L een lineaire transformatie waarvan de karakteristieke veelterm $\varphi_L(X)$ volledig ontbindt (over $\mathbb{R}$) als product van eerstegraadsfactoren. Stel dat $\text{Spec}(L) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.

Dan is L diagonaliseerbaar als en slechts als voor elke eigenwaarde λ_i geldt dat $d(\lambda_i) = m(\lambda_i)$.

B

→

Als L diagonaliseerbaar is heeft V dus een basis van eigenvectoren van L ; veronderstel dat β zo'n basis is. Schrijf de vectoren van β zo op zodat ze geordend staan per eigenwaarde die er mee overeenkomt; de eerste m_1 vectoren corresponderen dan met de eerste eigenwaarde λ_1 enzovoort. Het volstaat de (diagonaal) matrix van L op te stellen t.o.v. deze basis om het te bewijzen te controleren.

Stel $\beta = \{v_{1,1}, \dots, v_{1,m_1}, v_{2,1}, \dots, v_{2,m_2}, \dots, v_{k,1}, \dots, v_{k,m_k}\}$ zodat het beeld $L(\beta)$ gelijk is aan

$$L(\beta) = \{\lambda_1 v_{1,1}, \dots, \lambda_1 v_{1,m_1}, \lambda_2 v_{2,1}, \dots, \lambda_2 v_{2,m_2}, \dots, \lambda_k v_{k,1}, \dots, \lambda_k v_{k,m_k}\}$$

zodat de matrix L_β^β gelijk is aan

$$L_\beta^\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

en de karakteristieke veelterm gelijk is aan

$$\varphi_L = (X - \lambda_1)^{m_1} (X - \lambda_2)^{m_2} \dots (X - \lambda_k)^{m_k}$$

zodat voor λ_i dat $m_i = m(\lambda_i) = d(\lambda_i)$.



Veronderstel nu dat voor elke eigenwaarde λ_i geldt dat $d(\lambda_i) = m(\lambda_i) = m_i$.

Merk op dat

$$m(\lambda_1) + \dots + m(\lambda_k) = n$$

omdat de karakteristieke veelterm volledig als product van eerstegraadsfactoren ontbindt.

Kies nu respectievelijk een basis $\{v_{1,1}, \dots, v_{1,m_1}\}$ van E_{λ_1} , ..., en een basis $\{v_{k,1}, \dots, v_{k,m_k}\}$ van E_{λ_k} .

Dan vormt de verzameling

$$\beta = \{v_{1,1}, \dots, v_{1,m_1}, \dots, v_{k,1}, \dots, v_{k,m_k}\}$$

een verzameling met n elementen.

We zullen aantonen dat deze verzameling vrij is zodat ze een basis vormt voor V . Doordat dit dan een basis van eigenvectoren van L is volgt dan dat L diagonaliseerbaar is.

Stel dat een lineaire combinatie van vectoren van β de nulvector oplevert, m.a.w. stel

$$x_{1,1}v_{1,1} + \dots + x_{1,m_1}v_{1,m_1} + \dots + x_{k,1}v_{k,1} + \dots + x_{k,m_k}v_{k,m_k} = 0$$

met alle $x_{ij} \in \mathbb{R}$.

We merken op dat $x_{1,1}v_{1,1} + \dots + x_{1,m_1}v_{1,m_1} = u_1 \in E_{\lambda_1}$, ..., en $x_{k,1}v_{k,1} + \dots + x_{k,m_k}v_{k,m_k} = u_k \in E_{\lambda_k}$ zodat de som

$$u_1 + \dots + u_k = 0$$

van k vectoren in de eigenruimten behorend bij verschillende eigenwaarden.

We weten dat vectoren horend bij verschillende eigenvectoren lineair onafhankelijk zijn dus levert zo'n som de nulvector op als en slechts als $u_1 = \dots = u_k = 0$.

Dus geldt dat

$$x_{1,1}v_{1,1} + \dots + x_{1,m_1}v_{1,m_1} = u_1 = 0$$

waaruit dan volgt, omdat $\{v_{1,1}, \dots, v_{1,m_1}\}$ een basis is van E_{λ_1} , dat alle coëfficiënten $x_{1,i} = 0$.

Analoog verkrijgen we dat de andere coëfficiënten $x_{j,l} = 0$.

■

Opmerking

Als de lineaire transformatie $L: V \rightarrow V$ diagonaliseerbaar is, dan is $V = \sum_{i=1}^k E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}$, en de (disjuncte) unie van basissen van de E_{λ_i} , vormt een basis van V .

Propositie 5.24

Zij L een lineaire transformatie van een eindigdimensionale vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$, waarvan de karakteristieke veelterm volledig ontbindt (over $\mathbb{R}$) als product van eerstegraadsfactoren. Dan zijn de determinant en het spoor gelijk aan respectievelijk het product en de som van alle eigenwaarden van L , waarbij elke eigenwaarde geteld wordt met zijn algebraïsche multipliciteit.

verklaring:

Herhaal het bewijs van stelling 5.22 van het linker naar het rechterlid en beschouw de volgende matrix als de matrix behorende tot de lineaire transformatie L ten opzichte van de basis van eigenvectoren

$$L_{\beta}^{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

dan is per definitie

$$\text{Tr}(L_{\beta}^{\beta}) = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \dots + m_k\lambda_k = \sum_{i=1}^k m_i\lambda_i$$

en per stelling

$$\det(L_{\beta}^{\beta}) = \lambda_1^{m_1} \cdot \lambda_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \lambda_k^{m_k} = \prod_{i=1}^k \lambda_i^{m_i}$$

5.6 En nu met complexe getallen

Stelling 5.28

Zij $(\mathbb{C}, V, +)$ een vectorruimte van dimensie n en zij L een lineaire transformatie van V . Stel dat $\text{Spec}(L) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.

Dan is L diagonaliseerbaar als en slechts als voor elke eigenwaarde λ_i geldt dat $d(\lambda_i) = m(\lambda_i)$.

Propositie 5.29

Zij L een lineaire transformatie van een eindigdimensionale vectorruimte $(\mathbb{C}, V, +)$.

Dan zijn de determinant en het spoor gelijk aan respectievelijk het product en de som van alle eigenwaarden van L , waarbij elke eigenwaarde geteld wordt met zijn algebraïsche multipliciteit.

6. Inproductruimten en Euclidische ruimten

6.1 Inproducten en Hermitische producten

Definitie 6.1

Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een reële vectorruimte. Een **inproduct** (of **inwendig product** of **scalair product**) op V is een afbeelding

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R} : (v, w) \rightarrow \langle v, w \rangle$$

die voldoet aan de eigenschappen

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is lineair in de eerste component, dit wil zeggen

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle = \lambda_1 \langle v_1, w \rangle + \lambda_2 \langle v_2, w \rangle$$

voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ en voor alle $v_1, v_2 \in V$ en voor alle $w \in V$;

2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is symmetrisch, d.w.z. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ voor alle $v, w \in V$;

3. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is positief, d.w.z. $\langle v, v \rangle \geq 0$ voor alle $v \in V$;

4. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is definiet, d.w.z. $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ($\in V$);

Voortaan spreken we van een inproductruimte $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ als een reële vectorruimte voorzien van een inproduct.

Opmerking

Uit de lineariteit in de eerste component en de symmetrie van het inproduct volgt nu ook eenvoudig de lineariteit in de twee component.

Uit de lineariteit in beide componenten volgt ook dat $\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0$ ($\in \mathbb{R}$) voor alle $v \in V$.

Definitie 6.3

Zij $(\mathbb{C}, V, +)$ een complexe vectorruimte. Een **Hermitisch product** op V is een afbeelding

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C} : (v, w) \rightarrow \langle v, w \rangle$$

die voldoet aan de eigenschappen

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is lineair in de twee component, d.w.z. dat

$$\langle w, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_1 \langle w, v_1 \rangle + \lambda_2 \langle w, v_2 \rangle$$

voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ en voor alle $v_1, v_2 \in V$ en voor alle $w \in V$;

2. $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ voor alle $v, w \in V$;

3. $\langle v, v \rangle \geq 0$ voor alle $v \in V$ (positief);

4. voor $v \in V$ geldt $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ($\in V$) (definiet);

We spreken voortaan van een Hermitische ruimte $(\mathbb{C}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ als een complexe vectorruimte voorzien van een Hermitisch product.

Opmerking

In het algemeen is een Hermitisch product niet symmetrisch. De lineariteit in de tweede component wordt daardoor niet doorgetrokken naar de eerste component.

Wel geldt voor alle voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ en voor alle $v_1, v_2 \in V$ en voor alle $w \in V$ dat

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle = \overline{\lambda_1} \langle v_1, w \rangle + \overline{\lambda_2} \langle v_2, w \rangle$$

Men noemt deze eigenschap 'toegevoegde lineariteit' in de eerste component.

Opgelet!

Een hermitisch product neemt waarden aan in $\mathbb{C}$; een inproduct in $\mathbb{R}$.

Nochtans telkens geldt voor alle $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$. Dit is logisch voor een inproduct, voor een Hermitisch product geldt $\langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle}$ en dus moet het complex getal $\langle v, v \rangle$ reëel zijn.

Standaard inproduct en Hermitsch product

- Neem de vectorruimte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +)$ en definieer

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \left(X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \rightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T \cdot Y$$

We noemen dit het 'standaard inproduct' op $\mathbb{R}^n$.

- Het standaard Hermitisch product, op de vectorruimte $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n, +)$, is de afbeelding

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} : \left(X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \rightarrow \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i = \overline{X^T} \cdot Y$$

6.2 Euclidische meetkunde en Euclidische ruimte

Definitie 6.9

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte. Dan definiëren we, voor elke vector $v \in V$, de **lengte** van v (of de **norm** van v), $\|v\|$ genoteerd, als

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Wanneer voor een vector v geldt dat $\|v\| = 1$, dan noemen we v **genormeerd** of een **eenheidsvector**. Deze begrippen kan men evenzeer invoeren in een complexe vectorruimte met een Hermitisch product.

Stelling 6.11

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte met bijhorende norm $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R} : \|v\| \rightarrow \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Dan geldt

1. voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ en $v \in V$ dat $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$;
2. voor alle $v \in V$: $\|v\| \geq 0$ en $(\|v\| = 0 \leftrightarrow v = 0)$;

noot: De analoge eigenschap (met 'zelfde' bewijs) geldt ook voor een Hermitische ruimte waarbij dan $|\lambda|$, de modulus is van $\lambda \in \mathbb{C}$.

B

1. we gebruiken de lineairiteit in beide componenten zodat voor alle $\lambda \in V$ en alle $v \in V$ geldt dat

$$\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle v, v \rangle} = |\lambda| \cdot \|v\|$$

2. voor alle $v \in V$ geldt $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ met $\langle v, v \rangle \geq 0$ zodat $\|v\| \geq 0$
stel $v = 0$ dan $\sqrt{\langle 0, 0 \rangle} = \sqrt{0} = 0 = \|v\|$

■

opmerking

Iedere vector $v \neq 0$ kan aangepast worden tot een genormaliseerde vector door $\frac{1}{\|v\|} v$.

Definitie 6.13

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte. Voor willekeurige vectoren $v, w \in V$ definiëren we $d(v, w) = \|v - w\|$ als de **afstand** tussen v en w .

Stelling 6.14

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte.

1. Voor alle vectoren $v, w \in V$ geldt dat

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Deze ongelijkheid is bekend als de **ongelijkheid van Cauchy-Schwarz**.

2. Deze ongelijkheid is een gelijkheid als en slechts als de vectoren v en w lineair afhankelijk zijn.

B

Zij v en w twee willekeurige vectoren uit V . Als één van beide vectoren de nulvector is, zijn beide beweringen evident.

We mogen daarom veronderstellen dat v en w niet de nulvector zijn.

1. Voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ en $v, w \in V$, geldt dat

$$\langle v + \lambda w, v + \lambda w \rangle \geq 0$$

Wanneer we dit inproduct uitwerken vinden we

$$\begin{aligned} \langle v + \lambda w, v + \lambda w \rangle &= \langle v, v + \lambda w \rangle + \lambda \langle w, v + \lambda w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \lambda \langle v, w \rangle + \lambda \langle w, v \rangle + \lambda^2 \langle w, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + 2\lambda \langle v, w \rangle + \lambda^2 \langle w, w \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

Het linkerlid kan dus opgevat worden als een tweedegraadsveelterm p in λ , die - ongeacht de waarde van λ - steeds positief (of nul) is. Bijgevolg is de discriminant van p negatief (of nul).

Met andere woorden geldt:

$$4 \langle v, w \rangle^2 - 4 \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle \leq 0$$

wat equivalent is met

$$\langle v, w \rangle^2 \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$$

of dus ook met

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

2. Er treedt een gelijkheid op als en slechts als de vermelde discriminant gelijk is aan nul, met andere woorden als er een (unieke oplossing) λ_0 is van de vergelijking $p(\lambda) = 0$. Dit betekent dat $\langle v + \lambda_0 w, v + \lambda_0 w \rangle = 0$ wat equivalent is met $v + \lambda_0 w = 0$, zodat v en w lineair afhankelijk zijn.

Definitie 6.15

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte en zij $v \neq 0$ en $w \neq 0$ elementen van V . De hoek tussen v en w is de unieke hoek $\theta \in [0, \pi]$ waarvoor

$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Willekeurige vectoren v en w in V noemen we **orthogonaal** of **loodrecht** op elkaar als $\langle v, w \rangle = 0$; we schrijven hiervoor $v \perp w$. Als $v \neq 0$ en $w \neq 0$ geldt dus dat $v \perp w$ precies wanneer $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Stelling 6.17

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte met bijhorende norm $\|\cdot\|$. Dan geldt voor alle $v, w \in V$ dat $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (**driehoeksongelijkheid**).

noot: De driehoeksongelijkheid geldt ook als we $v + w$ vervangen door $v - w$.

B

We berekenen

$$\begin{aligned}\|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + 2 \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\ &\leq \|v\|^2 + 2 \cdot \|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2\end{aligned}$$

■

Definitie 6.19

Een eindigdimensionale inproductruimte noemen we een **Euclidische ruimte**.

Een eindigdimensionale Hermitsche ruimte noemen we een **unitaire ruimte**.

noot:

Zonder tegenbrecht noteren we $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ voor de n-dimensionale Euclidische ruimte met het standaardproduct en $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ voor de n-dimensionale unitaire ruimte met het standaard Hermitisch product.

6.3 Orthonormale basissen, orthonormale complementenStelling 6.21

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte en zij $\alpha = \{v_1, \dots, v_k\}$ een deelverzameling van V bestaande uit onderling twee aan twee orthogonale vectoren, allen verschillend van de nulvector (dus voor alle $i \neq j$ geldt dat $\langle v_i, v_j \rangle = 0$). Dan is α een vrije verzameling.

B

Veronderstel dat een lineaire combinatie van deze vectoren de nulvector oplevert:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$$

met alle $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Dan geldt voor elke $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ dat

$$0 = \langle v_i, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \rangle = \langle v_i, \lambda_i v_i \rangle = \lambda_i \|v_i\|^2$$

en bijgevolg is $\lambda_i = 0$.

■

Definitie 6.22

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte. Een basis $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ voor V zó dat

1. $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ voor alle indices $i \neq j$;
2. $\|v_i\| = 1$;

noemen we een **orthonormale basis** van V .

Indien we enkel (1) eisen spreken we van een **orthogonale basis**.

Stelling 6.24

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte en zij $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ een orthonormale basis van V .

Beschouw willekeurige vectoren v en w in V , met respectievelijk $(x_1, \dots, x_n)$ en $(y_1, \dots, y_n)$ in $\mathbb{R}^n$ als coördinaatvector ten opzichte van β .

$$\text{Dan is } \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x^T \cdot y$$

B

Zij $v, w \in V$ met respectievelijk $(x_1, \dots, x_n)$ en $(y_1, \dots, y_n)$ als coördinaatvector ten opzichte van de orthonormale basis $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ dan geldt

$$\begin{aligned}\langle v, w \rangle &= \langle x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, y_1 v_1 + \dots + y_n v_n \rangle \\ &= \langle x_1 v_1, y_1 v_1 \rangle + \dots + \langle x_n v_n, y_n v_n \rangle \\ &= x_1 y_1 \|v_1\|^2 + \dots + x_n y_n \|v_n\|^2 \\ &= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i\end{aligned}$$

■

Stelling 6.25

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte en $\{v_1, \dots, v_n\}$ een willekeurige basis van V , dan kan deze basis omgevormd worden tot een orthonormale basis $\{u_1, \dots, u_n\}$ en wel op een algoritmische manier. Deze werkwijze staat bekend als het **orthogonalisatieprocédé van Gram-Schmidt**.

B

Neem de vector v_1 . We normeren deze vector en verkrijgen aldus $u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$.

Neem nu de vector v_2 . Vorm $v'_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$. De vector v'_2 staat loodrecht op u_1 ; inderdaad we zien dat

$$\langle v'_2, u_1 \rangle = \langle v_2, u_1 \rangle - \langle v_2, u_1 \rangle \langle u_1, u_1 \rangle = 0$$

We weten dat $v'_2 \neq 0$ omdat stel dat $v'_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 = 0$ waaruit volgt dat $v_2 = \langle v_2, u_1 \rangle u_1 = \|v_2\| \cos \varphi u_1$ wat enkel het geval is als $\cos \varphi = 1$ zodat v_2 lineair afhankelijk is van u_1 en dus van v_1 wat in contradictie is met v_2 behoort tot de basis.

Nu wordt ook deze vector v'_2 genormeerd en dit levert $u_2 = \frac{1}{\|v'_2\|} v'_2$ op.

Zo werken we stapsgewijs verder. Veronderstel dat we op een zeker moment reeds de genormeerde en onderling orthogonale vectoren $u_1, \dots, u_k$ geconstrueerd hebben.

Neem nu v_{k+1} en vorm

$$v'_{k+1} = v_{k+1} - \langle v_{k+1}, u_1 \rangle u_1 - \dots - \langle v_{k+1}, u_k \rangle u_k$$

de vector v_{k+1} staat inderdaad loodrecht op zowel $u_1, \dots$, als u_k omdat

$$\begin{aligned} \langle v'_{k+1}, u_1 \rangle &= \langle v_{k+1}, u_1 \rangle - \langle v_{k+1}, u_1 \rangle \langle u_1, u_1 \rangle = 0 \\ &\vdots \\ \langle v'_{k+1}, u_k \rangle &= \langle v_{k+1}, u_k \rangle - \langle v_{k+1}, u_k \rangle \langle u_k, u_k \rangle = 0 \end{aligned}$$

Bovendien weten we dat $v'_{k+1} \neq 0$, omdat indien we stellen dat $v'_{k+1} = 0$ we zien dat

$$v'_{k+1} = v_{k+1} - \langle v_{k+1}, u_1 \rangle u_1 - \dots - \langle v_{k+1}, u_k \rangle u_k = 0$$

waaruit volgt dat

$$v_{k+1} = \langle v_{k+1}, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v_{k+1}, u_k \rangle u_k$$

zodat v_{k+1} een lineaire combinatie met coëfficiënten $\langle v_{k+1}, u_i \rangle$ met $i = 1, \dots, k$ van de vectoren $u_1, \dots, u_k$ en dus van $v_1, \dots, v_k$ wat in contradictie is met het feit dat v_{k+1} tot de basis behoort.

Omdat de vectorruimte eindigdimensionaal is, en de geconstrueerde vectoren een groeiende vrije verzameling vormen, moet dit proces uiteindelijk stoppen (bij de n -de vector). Het resultaat is een orthonormale basis, zoals gevraagd. ■

opmerking: alternatieve methode

Om de 'overload' aan vierkantswortels die we tegenkomen in het Gram-Schmidt-procédé te vermijden bestaat er een alternatieve versie van het Gram-Schmidt-procédé, waarbij we enkel op het einde vierkantswortes moeten nemen.

Deze alternatieve methode bestaat erin om eerst de gegeven basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ om te vormen tot een orthogonale basis $\{u'_1, \dots, u'_n\}$ en dan (op het einde) die orthogonale basis om te normaliseren.

(dus gewoon elke vector delen door zijn norm: $u_i = \frac{1}{\|u'_i\|} u'_i$.)

De formule om de $(k+1)$ -de basisvector te vinden in termen van de gegeven v_{k+1} en de voorheen geconstrueerde $u'_1, \dots, u'_k$ is nu

$$u'_{k+1} = v_{k+1} - \frac{\langle v_{k+1}, u'_1 \rangle}{\langle u'_1, u'_1 \rangle} u'_1 - \dots - \frac{\langle v_{k+1}, u'_k \rangle}{\langle u'_k, u'_k \rangle} u'_k$$

immers

$$\langle u'_{k+1}, u_i \rangle = \langle v_{k+1}, u_i \rangle - \frac{\langle v_{k+1}, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} \langle u_i, u_i \rangle = 0$$

voor alle $i = 1, \dots, k$.

Definitie 6.28

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte en U een deelruimte van V . We definiëren het **orthogonaal complement** van U als

$$U^\perp = \{v \in V \mid v \perp u \text{ voor alle } u \in U\}$$

Stelling 6.30

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte en U een deelruimte van V . Dan geldt dat

1. de som $U + U^\perp$ een directe som is (m.a.w. $U \oplus U^\perp$);
2. $U \oplus U^\perp = V$;
3. $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$;
4. $(U^\perp)^\perp = U$;

B

1. Veronderstel dat $v \in U \cap U^\perp$. Dan is v dus een vector van U en van $U^\perp$, zodat $\langle v, v \rangle = 0$. Door het feit dat het inproduct definitief is, volgt dat $v = 0$. De som is dus een directe som.
2. Neem een basis van U en orthonormaliseer die basis tot $\beta_U = \{u_1, \dots, u_k\}$. Neem een willekeurige vector $v \in V$. We vormen

$$v' = v - \langle v, u_1 \rangle u_1 - \dots - \langle v, u_k \rangle u_k$$

Het is nu eenvoudig in te zien dat v' orthogonaal is met alle basisvectoren u_i van U immers

$$\langle v', u_i \rangle = \langle v, u_i \rangle - \langle v, u_i \rangle \langle u_i, u_i \rangle = 0$$

voor alle $i = 1, \dots, k$, omdat β_U een orthonormale basis is.

In andere woorden uitgedrukt $v' \in U^\perp$. Dit betekent echter

$$v = \underbrace{\langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_k \rangle u_k}_{\in U} + \underbrace{v'}_{\in U^\perp} \in U \oplus U^\perp$$

en bijgevolg dat $U \oplus U^\perp = V$.

3. Deze eigenschap volgt rechtstreeks uit eigenschap 2.
4. Uit de definitie van orthogonaal complement volgt zeker dat $U \subset (U^\perp)^\perp$. Maar dan moeten beide deelruimten gelijk zijn want ze hebben dezelfde dimensie.

■

6.4 Transformaties met een symmetrische matrix

Stelling 6.32 (Hoofdstelling van de Algebra - C.F. Gauss)

Elke veelterm in $\mathbb{C}[X]$ kan volledig ontbonden worden als product van eerstegraadsfactoren. Met andere woorden, als $p[X] \in \mathbb{C}[X]$ een veelterm is van graad n , dan bestaan er elementen $c \in \mathbb{C}_0$, $x_i \in \mathbb{C}$ en $m_i \in \mathbb{N}_0$, zó dat

$$p(X) = c(X - x_1)^{m_1} \cdot (X - x_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (X - x_k)^{m_k}$$

waarbij $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$.

Lemma 6.33

Zij $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de standaard Euclidische ruimte en $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: X \mapsto A \cdot X$ een lineaire transformatie met een symmetrische matrix A . Dan heeft A uitsluitend reële eigenwaarden.

B

De karakteristieke veelterm $\varphi_A(X)$ van L_A is een veelterm met reële coëfficiënten. Het is niet automatisch zo dat deze veelterm ook nulpunten in $\mathbb{R}$ heeft.

We vertrekken van de standaard unitaire ruimte $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, met standaard Hermitisch product $\langle X, Y \rangle = \overline{X}^T \cdot Y$. De transformatiematrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kan ook opgevat worden als een lineaire transformatie $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, waarvoor we wel dezelfde notatie gebruiken, namelijk L_A . De karakteristieke veelterm $\varphi_A(X) \in \mathbb{R}[X]$ heeft, krachtens de hoofdstelling van de algebra, ongetwijfeld een nulpunt in $\mathbb{C}$. Deze nulpunten zijn de eigenwaarden van $L_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$; ze zijn dus potentieel complexe (niet-reële) getallen.

Veronderstel dat $\lambda \in \mathbb{C}$ zo een eigenwaarde is, en dat $X \in \mathbb{C}^n$ een bijhorende eigenvector is. Dus $A \cdot X = \lambda X$.

Nu geldt

$$\begin{aligned} \lambda \langle X, X \rangle &= \langle X, \lambda X \rangle \\ &= \langle X, A \cdot X \rangle \\ &= \overline{X}^T \cdot A \cdot X \\ &= \overline{X}^T \cdot \overline{A}^T \cdot X \text{ (omdat } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ en symmetrisch is)} \\ &= \langle A \cdot X, X \rangle \\ &= \langle \lambda X, X \rangle \\ &= \overline{\lambda} \langle X, X \rangle \end{aligned}$$

Hieruit (en omdat $\lambda \neq 0$) concluderen we dat $\lambda = \overline{\lambda}$. Bijgevolg is λ reëel. ■

Lemma 6.34

Zij $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de standaard Euclidische ruimte en $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: X \rightarrow A \cdot X$ een lineaire transformatie met een symmetrische matrix A .

Dan geldt: eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden van A zijn orthogonaal.

B

Uit het vorige lemma volgt dat de eigenvectoren van L_A reëel zijn. Stel dat $\lambda_1 \neq \lambda_2$ eigenwaarden zijn, met respectievelijk bijhorende eigenvectoren X_1 en X_2 in $\mathbb{R}^n$.

We berekenen nu

$$\begin{aligned} \lambda_2 \langle X_1, X_2 \rangle &= \langle X_1, \lambda_2 X_2 \rangle \\ &= \langle X_1, A \cdot X_2 \rangle \\ &= X_1^T \cdot A \cdot X_2 \\ &= (A \cdot X_1)^T \cdot X_2 \\ &= \langle A \cdot X_1, X_2 \rangle \\ &= \langle \lambda_1 X_1, X_2 \rangle \\ &= \lambda_1 \langle X_1, X_2 \rangle \end{aligned}$$

waaruit volgt dat $(\lambda_2 - \lambda_1) \langle X_1, X_2 \rangle = 0$. Omdat de eigenwaarden verschillen zijn kan hieruit enkel volgen dat $X_1 \perp X_2$. ■

Lemma 6.35

Zij $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de standaard Euclidische ruimte en $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: X \rightarrow A \cdot X$ een lineaire transformatie met een symmetrische matrix A . Dan is, voor elke eigenwaarde λ van L_A , de meetkundige multipliciteit $d(\lambda)$ gelijk aan de algebraïsche multipliciteit $m(\lambda)$.

B

Zij λ een eigenwaarde van A . De bijhorende eigenruimte E_λ heeft dimensie $d(\lambda)$.

We willen aantonen dat dit gelijk is aan $m(\lambda)$.

We bestuderen daartoe de karakteristieke veelterm van L_A , doch doen we dit nu door te vertrekken van een andere (maar gelijkvormige) matrixvoorstelling.

Deze verkrijgen we door een nieuwe basis voor $\mathbb{R}^n$ te kiezen.

We weten dat $\mathbb{R}^n = E_\lambda \oplus E_\lambda^\perp$. Kies een basis $\beta_\lambda = \{u_1, \dots, u_{d(\lambda)}\}$ van E_λ , en breid deze uit tot een basis β van $\mathbb{R}^n$ door aan te vullen met een basis van $E_\lambda^\perp$.

Neem een willekeurige vector $Y \in E_\lambda^\perp$. We willen nu inzien dat $A \cdot Y$ tot $E_\lambda^\perp$ behoort. Inderdaad voor een willekeurige vector $X \in E_\lambda$ geldt

$$\langle X, A \cdot Y \rangle = \langle A \cdot X, Y \rangle = \lambda \langle X, Y \rangle = 0$$

met andere woorden $A \cdot Y \in E_\lambda^\perp$. We kunnen de transformatie L_A dus beperken tot $E_\lambda^\perp$, met andere woorden die beperking is een lineaire transformatie $E_\lambda^\perp \rightarrow E_\lambda^\perp$.

Als we nu de matrixvoorstelling van $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ten opzichte van de basis β opsellen, dan verkrijgen we een matrix van de vorm

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_{d(\lambda)} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Hierin staat de matrix B voor de matrixvoorstelling van $L_A: E_\lambda^\perp \rightarrow E_\lambda^\perp$.

We beweren dat de matrix B onmogelijk nog λ als eigenwaarde kan hebben. Inderdaad, mocht dit wel het geval zijn, dan is er in $E_\lambda^\perp$ een eigenvector Y met eigenwaarde λ voor A . Deze eigenvector moet dus ook tot E_λ behoren wat betekent dat $Y = 0$ moet zijn, wat niet kan (als eigenvector).

Berekenen we de algebraïsche multipliciteit van λ , dan vinden we dat $m(\lambda) = d(\lambda)$. ■

Stelling 6.36 (Spectraalstelling voor symmetrische matrices)

Zij $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de standaard Euclidische ruimte en $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: X \rightarrow A \cdot X$ een lineaire transformatie met een symmetrische matrix A , dan bestaat er een orthormale basis voor $\mathbb{R}^n$ bestaande uit eigenvectoren van A .

Met andere woorden, dan is A gelijkvormig met een diagonaalmatrix, en de gelijkvormigheid kan gerealiseerd worden door een basisverandering van de orthonormale standaardbasis naar een orthonormale basis.

B

De essentie van het bewijs is reeds geleverd in de voorafgaande lemma's.

Het volstaat voor elke eigenwaarde λ een orthonormale basis voor de bijhorende eigenruimte E_λ te bepalen en deze samen te voegen.

Immers, als $\text{Spec}(L_A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ dan is $\mathbb{R}^n = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$. ■

opmerking:

Bovenstaande belangrijke stelling kan nog algemener geformuleerd worden. Immers, aandachtige studie van het bewijs van de lemma's leert dat die blijven gelden indien we werken in de standaard unitaire ruimte $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ en met een lineaire transformatie $L_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n: X \rightarrow A \cdot X$ bepaald door een matrix A waarvoor $A^{-T} = T$. Dergelijke matrices (met componenten in $\mathbb{C}$) noemen we Hermitische matrices.

6.5 Orthogonale matrices

Stelling 6.38

Zij $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de standaard Euclidische ruimte, en $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een vierkante matrix. Dan zijn volgende beweringen over A equivalent:

1. de kolommen van A vormen een orthonormale basis van $\mathbb{R}^n$;
2. $A^T \cdot A = I_n$;
3. $A^{-1} = A^T$;
4. $A \cdot A^T = I_n$;
5. de rijen van A vormen een orthonormale basis van $\mathbb{R}^n$;

B

2. Stel $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een matrix waarvan de kolommen een orthonormale basis vormen van $\mathbb{R}^n$. Dan merken we op dat het matrixproduct

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = B$$

overeenkomt met het inproduct van de kolomen van A .

We zien in dat voor elke b_{ij} waarvoor geldt dat $i = j$ het inproduct gelijk is aan

$$b_{ii} = \langle (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}), (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}) \rangle = 1$$

en dat voor elke b_{ij} waarvoor geldt dat $i \neq j$ het inproduct gelijk is aan

$$b_{ij} = \langle (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}), (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}) \rangle = 0$$

zodat de matrix B de eenheidsmatrix I_n is.

3. Uit eigenschap 2 weten we dat A^T de links inverse is van A zodat $A^T = A^{-1}$.
4. Middels een stelling uit het eerste hoofdstuk weten we dat een links inverse van een matrix gelijk is aan de rechts inverse van de matrix en dus gelijk is aan de (unieke) inverse van de matrix. Hieruit volgt dat $A \cdot A^T = A \cdot A^{-1} = I_n$.
5. Uit eigenschap 4 zien we in dat in het matrixproduct

$$A \cdot A^T = I_n = B$$

gelijk is aan het inproduct van de rijen.

We weten dat voor elke b_{ij} waarvoor geldt dat $i = j$ het inproduct gelijk is aan

$$b_{ii} = 1 = \langle (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \rangle$$

en dat voor b_{ij} waarvoor geldt dat $i \neq j$ het inproduct gelijk is aan

$$b_{ij} = 0 = \langle (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn}) \rangle$$

zodat we inzien dat de lengte van iedere rij van de matrix A gelijk is aan 1 en dat de verschillende rijen loodrecht op elkaar staan waaruit volgt dat de rijen van de matrix A een orthonormale basis van $\mathbb{R}^n$ bepalen.

■

Definitie 6.39

Een matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ noemen we een **orthogonale matrix** als en slechts als $A^T = A^{-1}$ (of equivalent, A aan de beweringen uit vorige stelling voldoet).

Stelling 6.40

Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een symmetrische matrix. Dan bestaat er een orthogonale matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zodat

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = P^T \cdot A \cdot P$$

een diagonaalmatrix is.

Lemma 6.41

Als $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een orthogonale matrix is dan geldt dat

1. $\det A \in \{-1, 1\}$;
2. elke (reële) eigenwaarde van A is gelijk aan 1 of -1 .

B

1. We weten dat voor een orthogonale matrix A geldt

$$\det(A) = \det(A^T)$$

zodat

$$\det(A) \cdot \det(A^T) = \det(I_n)$$

$$\det(A^2) = 1$$

$$\det(A) = \pm 1$$

2. Zij λ een eigenwaarde van A met bijhorende eigenvector $v \in \mathbb{R}^n$. Dan is

$$\lambda^2 \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle$$

$$= \langle A \cdot v, A \cdot v \rangle$$

$$= v^T \cdot A^T \cdot A \cdot v$$

$$= v^T \cdot v$$

$$= \langle v, v \rangle$$

en bijgevolg $\lambda^2 = 1 \leftrightarrow \lambda = \pm 1$. ■

Stelling 6.42

Zij $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de standaard Euclidische ruimte, en veronderstel $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: X \rightarrow A \cdot X$ een lineaire transformatie bepaald door een orthogonale matrix. Dan geldt:

1. $\|A \cdot X\| = \|X\|$;
2. $d(A \cdot X, A \cdot Y) = d(X, Y)$;
3. L_A is een isomorfisme;
4. als $\{u_1, \dots, u_n\}$ een orthonormale basis is voor $\mathbb{R}^n$, dan is $\{L_A(u_1), \dots, L_A(u_n)\}$ ook een orthonormale basis.

B

Voor $X, Y \in \mathbb{R}^n$ is $\langle A \cdot X, A \cdot Y \rangle = X^T \cdot A^T \cdot A \cdot Y = X^T \cdot Y = \langle X, Y \rangle$.

Hieruit volgt dadelijk dat L_A lengte (1), afstand (2) en orthogonaliteit van vectoren in $\mathbb{R}^n$ bewaart. De transformatie L_A is injectief (want 0 is geen eigenwaarde voor L_A wat equivalent is met $\ker(L_A) = \{0\}$) en bijgevolg een isomorfisme (3). Omdat L_A lengte en orthogonaliteit bewaart volgt dan ook (4). ■

Stelling 6.45

Als $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, en $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ een orthogonale matrix is dan geldt (voor de matrixnorm of Frobeniusnorm)

$$\|A\|_F = \|P \cdot A\|_F$$

B

We weten dat

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (a_{ik})^2$$

Als we $A = (a_1, \dots, a_n)$ noteren als een rij van kolommen, dan geldt dus

$$\|A\|_F^2 = \sum_{k=1}^n \|a_k\|^2$$

waarbij $\|a_k\|$ staat voor de standaard Euclidische norm in $\mathbb{R}^n$.

Het volstaat nu in te zien dat de kolommen van $P \cdot A$ precies de kolomvectoren $P \cdot a_k$ zijn, en dan volgt uit het feit dat P een orthogonale matrix is en vorige stelling dat

$$\|A\|_F^2 = \sum_{k=1}^n \|P \cdot a_k\|^2 = \|P \cdot a_k\|_F^2$$

■

6.6 Toepassing: minima en maxima van kwadratische vormen

Stelling 6.46

Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een symmetrische matrix en zij m en M respectievelijk de kleinste en grootste eigenwaarde van A . Beschouw de kwadratische vorm $Q(x) = x^T \cdot A \cdot x$ als functie $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij we $x \in \mathbb{R}^n$ interpreteren als kolomvector. Dan is $\min\{Q(x) | x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\} = m$ respectievelijk $\max\{Q(x) | x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\} = M$ en deze waarden worden bereikt in een eigenvector bij m , respectievelijk M , met norm 1.

noot: lees de toepassing op blz. 183-184

6.7 Orthogonale en symmetrische lineaire transformaties

Merk op dat de vectorruimte V oneindigdimensionaal kan zijn.

Definitie 6.47

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte. Een lineaire transformatie L van V heet orthogonaal als

$$\langle L(v), L(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

voor alle $v, w \in V$.

Propositie 6.48

Een lineaire transformatie van een inproductruimte $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ is orthogonaal als en slechts als

$$\|L(v)\| = \|v\|$$

voor alle $v \in V$.

B

Een orthogonale transformatie bewaart vanzelfsprekend ook de norm van de vector.

■

Propositie 6.49

Zij L een orthogonale lineaire transformatie van een inproductruimte $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dan geldt:

1. elke (reële) eigenwaarde van L is 1 of -1 ;
2. L is injectief en, als V eindigdimensionaal is, dan ook een isomorfisme;

opmerking:

Het is natuurlijk geen toeval dat orthogonale transformaties van een eindigdimensionale inproductruimte 'dezelfd' eigenschappen hebben als orthogonale matrices: de matrix van zo'n orthogonale transformatie is precies een orthogonale matrix, tenminste als we werken met een orthonormale basis.

Stelling 6.50

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een n-dimensionale inproductruimte en L een lineaire transformatie van V met matrix A ten opzichte van een orthonormale basis van V. Dan geldt:

L is orthogonaal als en slechts als A is orthogonaal.

B

Noteer de coördinaten van een willekeurige vector $v \in V$ (ten opzichte van de gegeven orthonormale basis) met X_v , zoals gewoonlijk beschouwd als kolomvector in $\mathbb{R}^n$. Dan geldt voor willekeurige vectoren $v, w \in V$:

$$\langle v, w \rangle = X_v^T \cdot X_w$$

en anderzijds

$$\langle L(v), L(w) \rangle = (A \cdot X_v)^T \cdot A \cdot X_w = X_v^T \cdot A^T \cdot A \cdot X_w$$

Als A orthogonaal is, met andere woorden als $A^T \cdot A = I_n$, zijn beide rechterleden gelijk, en dus $\langle v, w \rangle = \langle L(v), L(w) \rangle$ voor willekeurige $v, w \in V$. Omgekeerd, als L orthogonaal is zijn beide linkerleden gelijk en dus $X_v^T \cdot I_n \cdot X_w = X_v^T \cdot X_w = X_v^T \cdot (A^T \cdot A) \cdot X_w$ voor willekeurige n-tallen $X_v, X_w \in \mathbb{R}^n$. Hieruit leiden we af dat $I_n = A^T \cdot A$, met andere woorden dat A orthogonaal is. ■

Definitie 6.51

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte. Een lineaire transformatie L van V heet symmetrisch als

$$\langle L(v), w \rangle = \langle v, L(w) \rangle$$

voor alle $v, w \in V$.

Propositie 6.52

Zij L een symmetrische (lineaire) transformatie van een inproductruimte $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dan zijn eigenvectoren bij verschillende eigenwaarde van L orthogonaal.

noot: het bewijs van deze propositie is gelijkaardig aan het bewijs van propositie 6.34.

Stelling 6.54

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een n-dimensionale inproductruimte, en L een lineaire transformatie van V met matrix A ten opzichte van een orthonormale basis van V. Dan geldt:

L is symmetrisch als en slechts als A is symmetrisch.

noot: het bewijs van deze stelling is analoog aan het bewijs van stelling 6.50.