De conclusie is dus dat

$$\dim(V) = \begin{cases} 1 & a = 0 \\ 2 & a \neq 0, a = b \\ 3 & a \neq 0, a \neq b \end{cases}.$$

Wiskunde & fysica

Vraag 1

Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte en $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ een deelverzameling van m vectoren uit V. Bewijs het lemma van Steinitz: als A voortbrengend is voor V, dan is een willekeurige deelverzameling van V met meer dan m elementen lineair afhankelijk.

Oplossing. Zie het boek p. 108, (Stelling 3.35).

Vraag 2

Waar of fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(a) Als A en B vierkante $n \times n$ matrices zijn en AB is inverteerbaar, dan zijn zowel A als B inverteerbaar.

(b) Een vierkante bovendriehoeksmatrix waarvan de diagonaalelementen verschillend van 0 zijn, is inverteerbaar.

Herinner dan we $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een bovendriehoeksmatrix noemen als $a_{ij} = 0$ voor alle $i > j$. De diagonaalelementen zijn a_{ii} met $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(c) Als v_1, v_2, v_3 vectoren in een vectorruimte zijn en $v_1 \in \text{vct}\{v_2, v_3\}$, dan is $v_2 \in \text{vct}\{v_1, v_3\}$.

Oplossing.

(a) Waar.

Als AB inverteerbaar is dan is $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$. Hieruit volgt dat $\det(A) \neq 0$ en $\det(B) \neq 0$ en dus dat A en B inverteerbaar zijn.

(b) Waar.

We weten uit Stelling 2.4.1 dat de determinant van een bovendriehoeksmatrix A het product van zijn diagonaalelementen is, in symbolen $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$. Aangezien alle diagonaalelementen niet nul zijn is $\det(A) \neq 0$ en dus is A inverteerbaar.

(c) Onwaar.

Een tegenvoorbeeld is gegeven door $V = \mathbb{R}, v_1 = v_3 = 0$ en $v_2 = 1$. Dan is $v_1 \in \text{vct}\{v_2, v_3\} = \text{vct}\{1, 0\} = \mathbb{R}$, maar $v_2 \neq \text{vct}\{v_1, v_3\} = \text{vct}\{0, 0\} = \{0\}$.

Vraag 3

Zij $V = \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ de vectorruimte van veeltermen met reële coëfficiënten en graad hoogstens n.

(a) Toon aan dan $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n + 1$.

(b) Veronderstel dat $P_0, \ldots, P_n \in V$ willekeurige veeltermen zijn zodat P_i graad i heeft voor elke $i = 0, \ldots, n$. Bewijs dat $\{P_0, \ldots, P_n\}$ een basis van V is.

We gebruiken hier de conventie dat de veeltermen van graad 0 precies de constante veeltermen verschillend van de nulveelterm zijn.

Oplossing.

(a) De verzameling $\{1, X, ..., X^n\}$ is een basis van V, want elke veelterm in V kan op een unieke manier geschreven worden als een lineaire combinatie van de veeltermen $1, X, ..., X^n$. Dus $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n + 1$.

(b) We stellen dat $\{P_0, ..., P_n\}$ een vrij deel is. Dit is voldoende, want er volgt uit stelling 3.44 dan deze verzameling vectoren dan ook voortbrengend is en dus een basis.

Om de uitspraak hierboven na te gaan, redeneren we uit het ongerijmde dat er een niet-triviale lineaire gelijkheid

$$\lambda_0 P_0 + ... + \lambda_n P_n = 0 \tag{1}$$

estaat, met $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ niet allen nul. Bekijk de maximale k die voldoet aan $0 \leq k \leq n$ en $\lambda_k \neq 0$. Door naar de coëfficiënt van X^k te kijken in gelijkheid 1, bekomen we een onmogelijkheid.