

Examen Lineaire Algebra 2020 (Wiskunde/Fysica)

∈ Wina

Aanstaande Maandag

1 Vraag 1

Zij $L : V \rightarrow V$ een lineaire transformatie, waarvan de karakteristieke ontbindt in eerstegraadstermen en waarvan voor elke eigenwaarde λ geldt dat $d(\lambda) = m(\lambda)$. Bewijs dat L diagonaliseerbaar is.

2 Vraag 2

Bewijs de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz.

3 Vraag 3

Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

1. Zijn W_1 , W_2 en W_3 deelruimtes van v . Als $W_1 \oplus W_2 = V$ en $W_1 \oplus W_3 = V$, dan is $W_2 = W_3$.
2. Als de matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ enkel reële nulpunten heeft, dan geldt ook $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
3. Zijn f_1 tot en met f_5 lineaire transformaties zoals in volgend diagram:

$$\{0\} \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}^8 \xrightarrow{f_3} \mathbb{R}^{13} \xrightarrow{f_4} \mathbb{R}^6 \xrightarrow{f_5} \{0\}$$

Als $\ker f_{i+1} = \operatorname{Im} f_i$ geldt voor elke $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, dan is $n = 1$. Er stond nog een hint bij deze vraag, maar daarvoor moet je bijbetalen.

4 Vraag 4

Definieer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$ en $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^x$. Zij V dan de vectorruimte $\operatorname{vct}\{f, g, h\}$. Definieer vervolgens de lineaire transformatie $D : V \rightarrow V$ als volgt:

$$D(k) = ak + bk' + k''$$

Voor elke $k \in V$ en met $a, b \in \mathbb{R}$

1. Geef $\dim \ker D$ in functie van a en b .
2. Bepaal alle a en b zodat D diagonaliseerbaar is in $\mathbb{R}$

5 Vraag 5

Zij V een eindigdimensionale vectorruimte met dimensie n . Als $1 \leq k \leq n$, en $U_1, \dots, U_k$ verschillende deelruimtes zijn van V , met elk dimensie $n - 1$

1. Bewijs dan dat $\dim(U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k) \geq n - k$
2. Toon met een voorbeeld aan dat gelijkheid hier niet altijd hoeft te gelden.