Schriftelijk gedeelte

Opgave 1 - Voortbrengers en relaties

Bekijk de Abelse groep G met als voortbrengers a, b, c en d en met relaties $4a + 6b = 6c = 6b - 2d = 3b - 3c - d = 0$. Schrijf G als directe som van cyclische, primaire deelgroepen en geef expliciet een voortbrenger voor elke factor.

De standaardberekeningen (die ik hier niet zal uitschrijven) geven dat de groep isomorf is met $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. *Voortbrengers van de vier factoren zijn (bijvoorbeeld) de klassen van* $a + b$, $2a + 3b$, $3c$ *en* $2c$.

Opgave 2 - Eindig gepresenteerde modulen over een lokale ring

Zij R een ring. We zeggen dat een R-module M *eindig gepresenteerd* is als er een exacte rij van homomorfismen van R-modulen van de vorm $R^s \to R^t \to M \to 0$ bestaat, met $s, t \in \mathbb{N}$. Uiteraard is een dergelijke R-module eindig voortgebracht.

(a) Bewijs dat indien R Noethers is, elke eindig voortgebrachte R-module ook eindig gepresenteerd is.
Zij M een eindig voortgebrachte R-module over de Noetherse ring R. Er bestaat dus een surjectief homomorfisme van R-modulen $f : R^n \to M$ voor een zekere n. Dan is $\ker f$ *eindig voortgebracht als deelmodule van de Noetherse R-module R^n. Kies dus weer een surjectief homomorfisme van R-modulen $g : R^m \to \ker f$ en zij $i : \ker f \to R^n$ de evidente inclusie. Dan maakt het morfisme $i \circ g : R^m \to R^n$ het rijtje $R^m \to R^n \to M \to 0$ exact.*

(b) Stel nu dat M een eindig gepresenteerde R-module is (maar R is willekeurig, i.h.b. niet noodzakelijk Noethers!). Bewijs dat voor elk surjectief R-module-homomorfisme $f : R^n \to M$ geldt dat $\ker f$ eindig voortgebracht is. ($\star$)
Bekijk het volgende diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & R^s \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & R^t \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r] & R^n \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Hierbij wordt α zo gekozen dat het rechtse vierkant commuteert: omdat R^t vrij (dus projectief) is, bestaat een dergelijk homomorfisme α. Verder geldt dat de samenstelling $R^s \to R^t \to R^n \to M$ gelijk is aan het nulmorfisme, dus factoriseert $R^s \to R^t \to R^n$ door de kern van $f : R^n \to M$. Dit geeft het bestaan van een homomorfisme β dat het linker vierkant laat commuteren. Wegens het slangenlemma zijn de cokernen van α en β isomorf. De cokern van α is een quotiënt van de eindig voortgebrachte R-module R^n en is dus zeker eindig voortgebracht. De cokern van β is dat bijgevolg ook. Nu hebben we een kort exact rijtje van de vorm $0 \to \beta(R^s) \to \ker f \to \operatorname{coker} \beta \to 0$ waarin de "buitenste" modulen duidelijk eindig voortgebracht zijn. Bijgevolg geldt dat ook voor $\ker f$.

Het doel van deze opgave is om het volgende resultaat te bewijzen:

> *Zij R een lokale ring en zij M een platte, eindig gepresenteerde R-module. Dan is M vrij.*

Omdat vrije modulen projectief zijn, en projectieve modulen plat, betekent dit dat de noties "vrij", "projectief" en "plat" samenvallen voor eindig gepresenteerde modulen over een lokale ring. Zij R dus een willekeurige lokale ring met maximaal ideaal $\mathfrak{m}$ (cfr. opgavenbundel). Noteer $k = R/\mathfrak{m}$ voor het residuveld en zij M een eindig gepresenteerde platte R-module.

(c) Leg zeer bondig uit waarom $M/\mathfrak{m}M$ een eindigdimensionale k-vectorruimte is. ($\circ$)
Kies een stel voortbrengers $m_1, m_2, \cdots, m_d$ van de eindig gepresenteerde (dus eindig voortgebrachte) R-module M. Dan zijn $m_1 + \mathfrak{m}M, m_2 + \mathfrak{m}M, \cdots, m_n + \mathfrak{m}M$ voortbrengers voor de $R/\mathfrak{m}$-module (k-vectorruimte) $M/\mathfrak{m}M$.

Zij $d = \dim_k(M/\mathfrak{m}M)$. Neem $m_1, \cdots, m_d \in M$ zodat $m_1 + \mathfrak{m}M, \cdots, m_d + \mathfrak{m}M$ een k-basis is van $M/\mathfrak{m}M$.

(d) Verifieer dat M als R-module wordt voortgebracht door $m_1, \cdots, m_d$. Gebruik daarvoor het lemma van... ($\circ$)
Dit volgt rechtstreeks uit het lemma van Nakayama (opgave 40(c)). Hierbij moet natuurlijk worden opgemerkt dat M eindig voortgebracht is en dat het Jacobson-radicaal van R hier niks anders is dan $\mathfrak{m}$, want R is lokaal.

Bekijk nu het homomorfisme van R-modulen $\varphi : R^d \to M : (r_1, \cdots, r_d) \mapsto r_1 m_1 + \cdots + r_d m_d$. Noteer ook $K = \ker \varphi$. Bijgevolg is $0 \to K \to R^d \to M \to 0$ exact (merk op dat φ surjectief is omdat M wordt voortgebracht door $m_1, \cdots, m_d$).

(e) Bepaal $\mathrm{Tor}_1^R(M, k)$. ($\circ$)
Omdat M plat is over R, geldt dat $\mathrm{Tor}_1^R(M, N) = 0$ voor alle R-modulen N, dus zeker ook voor $N = k = R/\mathfrak{m}$.

(f) Leid uit het gegeven kort exact rijtje een nieuw kort exact rijtje $0 \to K/\mathfrak{m}K \to k^d \to M/\mathfrak{m}M \to 0$ af.
De functor $-\otimes_R k$ is rechts exact en heeft als links afgeleiden de functoren $\mathrm{Tor}_n^R(-, k)$. De lange exacte rij geassocieerd aan het korte exacte rijtje $0 \to K \to R^d \to M \to 0$ is $\cdots \to \mathrm{Tor}_1^R(M, k) \to K \otimes_R k \to R^d \otimes_R k \to M \otimes_R k \to 0$. Nu geldt $K \otimes_R k = K \otimes_R R/\mathfrak{m} \cong K/\mathfrak{m}M$, $R^d \otimes_R k \cong k^d$ en $M \otimes_R k \cong M/\mathfrak{m}M$. Bovendien weten we uit (e) ook al dat $\mathrm{Tor}_1^R(M, k) = 0$. We verkrijgen dus het korte exacte rijtje $0 \to K/\mathfrak{m}K \to k^d \to M/\mathfrak{m}M \to 0$.

(g) Toon aan dat $\varphi : R^d \to M$ een isomorfisme is. ($\star$)
In het rijtje $0 \to K/\mathfrak{m}K \to k^d \to M/\mathfrak{m}M \to 0$ is de afbeelding $k^d \to M/\mathfrak{m}M$ een surjectie tussen k-vectorruimten van dezelfde dimensie d. Bijgevolg is deze afbeelding een isomorfisme, dus $K/\mathfrak{m}K = 0$. Maar K is eindig voortgebracht wegens (b), dus uit $K/\mathfrak{m}M = 0$ volgt (Nakayama!) dat $K = 0$. Bijgevolg is φ injectief, dus een isomorfisme.

Bijgevolg is $M \cong R^d$ inderdaad een vrije module.

Opgave 3 - De constructie van lokale cohomologie

Het onderstaande tekstje schetst de constructie van functoren $H^n_{\mathfrak{a}}(-)$ die in zekere zin de "diepte" van een R-module ten opzichte van een ideaal $\mathfrak{a}$ van R meten. De bedoeling is om de cursief gedrukte fragmenten in detail te verantwoorden.

> Zij R een Noetherse ring en zij $\mathfrak{a}$ een ideaal van R. We definiëren $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \{m \in M \mid \exists n \in \mathbb{N} : \mathfrak{a}^n m = 0\}$ voor elke R-module M. Indien $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = M$, dan zeggen we dat M een $\mathfrak{a}$-torsiemodule is. We *definiëren nu op natuurlijke wijze een covariante functor $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ van de categorie van R-modulen naar zichzelf* ($\circ$). Deze functor is *links exact* ($\circ$), maar *in het algemeen niet exact*. We kunnen nu rechtsafgeleide functoren $H^n_{\mathfrak{a}}(-)$ van $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ definiëren. Voor elke R-module M geldt *dat de modulen $H^n_{\mathfrak{a}}(M)$ allemaal $\mathfrak{a}$-torsiemodulen zijn*. Als I een injectieve R-module is, dan is ook $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$ een injectieve R-module - hiervoor is de voorwaarde dat R Noethers is (die nergens anders moet worden gebruikt) cruciaal. Bijgevolg *heeft elke $\mathfrak{a}$-torsiemodule een injectieve resolutie waarvan alle termen $\mathfrak{a}$-torsiemodulen zijn* ($\star$). Daaruit volgt dat *voor elke R-module M die $\mathfrak{a}$-torsie is en voor elke $n \geq 1$ geldt dat $H^n_{\mathfrak{a}}(M) = 0$*. Als nu M een R-module is en als N een $\mathfrak{a}$-torsie-deelmodule is van M, *dan geldt bijgevolg dat $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M/N) \cong \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)/\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$ en $H^n_{\mathfrak{a}}(M) \cong H^n_{\mathfrak{a}}(M/N)$ voor alle $n \geq 1$.*

- "We definiëren nu op natuurlijke wijze een covariante functor $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ van de categorie van R-module naar zichzelf."
We hebben $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ al gedefinieerd op objecten: merk op dat $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ een deelmodule is van M voor elke R-module M. We definiëren $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ nu op de morfismen: als $f : M \to N$ een homomorfisme van R-modulen is, dan is $\Gamma_a(f)$ de beperking van f tot $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$. Het beeld van deze beperking ligt inderdaad in $\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$, want als $\mathfrak{a}^n m = 0$ voor een zekere n, dan zal ook $\mathfrak{a}^n f(m) = f(\mathfrak{a}^n m) = f(0) = 0$. Het is dan ook duidelijk dat $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ samenstellingen bewaart.

- "Deze functor is links exact..."
Zij $0 \to M \to N \to P \to 0$ een korte exacte rij van R-modulen. We gaan na dat $0 \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(N) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(P)$ exact is. De afbeelding $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$ is injectief als beperking van de injectieve afbeelding $f : M \to N$. Het beeld van $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$ is bevat in de kern van $\Gamma_{\mathfrak{a}}(N) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(P)$ omdat het beeld van $f : M \to N$ bevat is in de kern van $g : N \to P$. Omgekeerd, als $n \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$ met $\Gamma_{\mathfrak{a}}(g)(n) = g(n) = 0$, dan bestaat er een $m \in M$ met $f(m) = n$. Nu is $\mathfrak{a}^k n = 0$ voor een zekere k, en omdat f injectief is geldt dan $\mathfrak{a}^k m = 0$. Bijgevolg is $m \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ met $f(m) = n$, dus de kern van $\Gamma_{\mathfrak{a}}(N) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(P)$ is inderdaad gelijk aan het beeld van $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$.

- "... maar in het algemeen niet exact."
Neem $R = \mathbb{Z}$ en bekijk het exacte rijtje $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ gegeven door vermenigvuldiging met 2 op $\mathbb{Z}$. Toepassen van $\Gamma_{(2)}(-)$ transformeert dit rijtje in $0 \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$, dat uiteraard niet meer exact is.

- "Voor elke R-module M geldt dat de modulen $H^n_{\mathfrak{a}}(M)$ allemaal $\mathfrak{a}$-torsiemodulen zijn."
Kies een injectieve (co)resolutie $0 \to M \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \cdots$ van M. Dan geldt - wegens de definitie van afgeleide functoren - $H^n_{\mathfrak{a}}(M) = \ker(\Gamma_{\mathfrak{a}}(I^n) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^{n+1}))/\mathrm{im}(\Gamma_{\mathfrak{a}}(I^{n-1}) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^n))$ voor alle $n \geq 0$. Het is duidelijk dat $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I^n)$ een $\mathfrak{a}$-torsiemodule is. Verder zijn deelmodulen en quotiënten van $\mathfrak{a}$-torsiemodulen ook $\mathfrak{a}$-torsiemodulen. Bijgevolg is $H^n_{\mathfrak{a}}(M)$ als quotiënt van een deelmodule van de $\mathfrak{a}$-torsiemodule $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I^n)$ weer een $\mathfrak{a}$-torsiemodule.

- "Bijgevolg heeft elke $\mathfrak{a}$-torsiemodule een injectieve resolutie waarvan alle termen $\mathfrak{a}$-torsiemodulen zijn."
Zij M een $\mathfrak{a}$-torsiemodule en bed M in in een injectieve R-module I^0. Toepassen van $\Gamma_a(-)$ op $0 \to M \to I^0$ geeft een inbedding $0 \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = M \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^0)$, en $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I^0)$ is injectief. Bekijk nu de $\mathfrak{a}$-torsiemodule $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I^0)/M$, die kan worden ingebed in een injectieve R-module I^1. Pas opnieuw toe $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ toe: we bekomen dat $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I^0)/M$ kan worden ingebed in $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I^1)$. Herhaal dit proces door een inbedding te kiezen van $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I^1)/(\Gamma_{\mathfrak{a}}(I^0)/M)$ in een injectieve R-module I^2, et cetera. We bekomen zo een injectieve resolutie $0 \to M \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^0) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^1) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(I^2) \to \cdots$.

- "Daaruit volgt dat voor elke R-module M die $\mathfrak{a}$-torsie is en voor elke $n \geq 1$ geldt dat $H^n_{\mathfrak{a}}(M) = 0$."
Kies (m.b.v. het voorgaande puntje) een injectieve resolutie van M die uit $\mathfrak{a}$-torsiemodulen bestaat. Toepassen van $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ laat deze resolutie dan onveranderd! Per definitie zijn de $H^n_{\mathfrak{a}}(M)$ de cohomologiemodulen van dit complex, maar de cohomologiemodulen van een exact complex zijn natuurlijk triviaal.

- "... dan geldt bijgevolg dat $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M/N) \cong \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)/\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$ en $H^n_{\mathfrak{a}}(M) \cong H^n_{\mathfrak{a}}(M/N)$ voor alle $n \geq 1$."
Bekijk het korte exacte rijtje $0 \to N \to M \to M/N \to 0$, waarin N een $\mathfrak{a}$-torsiemodule is. Toepassen van $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ en de bijhorende rechts-afgeleide functoren $H^n_{\mathfrak{a}}(-)$ geeft de lange exacte rij

$$0 \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(N) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(M/N) \to H^1_{\mathfrak{a}}(N) \to H^1_{\mathfrak{a}}(M) \to H^1_{\mathfrak{a}}(M/N) \to H^2_{\mathfrak{a}}(N) \to \cdots$$

Omdat $H^n_{\mathfrak{a}}(N) = 0$ voor alle $n \geq 1$ geeft dit onmiddellijk de isomorfismen $H^n_{\mathfrak{a}}(M) \cong H^n_{\mathfrak{a}}(M/N)$ voor alle $n \geq 1$, en ook dat $0 \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(N) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \to \Gamma_{\mathfrak{a}}(M/N) \to 0$ exact is - met andere woorden, dat $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M/N) \cong \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)/\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$.
