# Modulen en homologische algebra
# Examen 2011-2012

Wim Veys & Arne Smeets

17 januari 2012

## Richtlijnen

Voor dit examen krijgen jullie 4.5 uur tijd. Het examen bestaat uit drie delen:

(1) een mondeling gedeelte bij Wim Veys met drie theorievragen,

(2) een mondeling gedeelte bij Arne Smeets met een aantal vragen over de huistaken die jullie gemaakt hebben,

(3) een schriftelijk gedeelte met drie oefeningen.

**Belangrijk:** Jullie zouden na ongeveer één uur werken klaar moeten zijn voor de mondelinge ondervragingen!

Dit examen wordt beoordeeld door middel van een score $E$ op 20 punten. Samen met de takenscore $T$ op 20 punten geeft dit de finale score $F = \max\left\{E, \frac{1}{4}(3E+T)\right\}$ voor dit vak. Goede taken kunnen een minder examen dus compenseren.

Tijdens het examen mogen jullie gebruik maken van de cursustekst, de opgavenbundel voor de oefenzittingen en de bijhorende bundel met oplossingen en hints, jullie eigen aantekeningen die gemaakt zijn tijdens de les, jullie eigen (handgeschreven) oplossingen voor de opgaven uit de oefenzitting en jullie eigen oplossingen (en de modeloplossingen) voor de huistaken.

In het schriftelijk deel hebben we de deelopgaven die ons erg eenvoudig lijken van het symbool ($\circ$) voorzien. Andere deeltjes lijken ons pittig en deze hebben we het symbool ($\star$) gegeven. Deze (subjectieve) inschattingen zijn bedoeld als hulpmiddel. Schrijf op elke pagina die je inlevert voor het schriftelijk deel duidelijk je naam. Begin voor elke opgave een nieuw blad!

**Belangrijk:** Tijdens dit examen zijn *alle* ringen commutatief met eenheidselement.

Planning van de mondelinge ondervragingen:

| | Wim Veys | Arne Smeets | | Wim Veys | Arne Smeets |
|---|---|---|---|---|---|
| vanaf 11u | Liebrecht De Sadeleer<br>Stief Gijsen<br>Daan Michiels<br>Line Neyens | Eva Santermans<br>Pieter Segaert<br>Renata Turkes<br>Jeroen Wynen | vanaf 14u | Dennis Presotto<br>Jan Rombouts<br>Jasper Van Hirtum | Natacha Cappelle<br>Eveline De bruyn<br>Annelies Jaspers<br>Karel Kenens |
| vanaf 12u | Eva Santermans<br>Pieter Segaert<br>Renata Turkes<br>Jeroen Wynen | Liebrecht De Sadeleer<br>Stief Gijsen<br>Daan Michiels<br>Line Neyens | vanaf 15u | Sofie Burggraeve<br>Freek Holvoet<br>Nanneke Lapidaire<br>Céline Pringels | Tom Reynkens<br>Katrijn Soenen<br>Dries Stivigny |
| vanaf 13u | Natacha Cappelle<br>Eveline De bruyn<br>Annelies Jaspers<br>Karel Kenens | Dennis Presotto<br>Jan Rombouts<br>Jasper Van Hirtum | vanaf 16u | Tom Reynkens<br>Katrijn Soenen<br>Dries Stivigny | Sofie Burggraeve<br>Freek Holvoet<br>Nanneke Lapidaire<br>Céline Pringels |

**Succes!**

# Mondeling gedeelte bij Wim Veys

### Opgave 1

Beantwoord enkele vragen over de stelling (en haar bewijs) die de structuur van een endomorfisme van een eindigdimensionale vectorruimte beschrijft ("Stelling 1" op pagina's 38 tot en met 40 in het eerste deel van de cursustekst).

### Opgave 2

Leg het bewijs uit van het feit dat een functor die een linksadjuncte functor heeft, pullbacks bewaart.

### Opgave 3

Waar of niet? Verklaar (kort) je antwoord.

*Elke deelmodule van een eindig voortgebrachte vrije module over een domein is een vrije module.*

---

# Mondeling gedeelte bij Arne Smeets

Tijdens dit gedeelte worden enkele vraagjes gesteld over de taken die je tijdens het semester hebt gemaakt. De volgende vragen mag je alvast voorbereiden - zij zullen dienen als basis voor een discussie over de taken. Elke vraag kan zéér kort en bondig worden beantwoord. Spendeer niet teveel tijd aan het voorbereiden (hoogstens een half uur). Je zal niet lineair gequoteerd worden op het aantal vraagjes dat je zelfstandig hebt kunnen oplossen, maar wél op de discussie die zal volgen.

- **(Taak 1)** In deze huistaak werden eenheden en nilpotenten bestudeerd in veeltermen- en machtreeksenringen in één variabele over een willekeurige ring. Kan je een voorbeeld geven van een resultaat daarover uit deze huistaak dat je - zonder veel extra moeite - kan veralgemenen naar veeltermen- en/of machtreeksenringen in meerdere variabelen?
- **(Taak 2)** In de tweede opgave wordt het tensorproduct $\mathfrak{m} \otimes_A \mathfrak{m}$ berekend voor $A = k[X,Y]$ en $\mathfrak{m} = (X,Y)$, met $k$ een veld. Wat zou het resultaat van de berekening zijn als je het ideaal $(X,Y)$ vervangt door het ideaal $(XY)$?
- **(Taak 3)** Pas het resultaat van opgave 1(b) toe op de matrix uit opgave 1(a). Welke matrix verkrijg je?
- **(Taak 4)** Zij $R$ een willekeurige commutatieve ring en zij $P$ een $R$-module die eindig voortgebracht en projectief is. Toon aan dat $\mathrm{Hom}_R(P,M) \cong M \otimes_R P^\vee$ voor elke $R$-module $M$, waarbij $P^\vee$ de duale module is van de $R$-module $P$. (*Op het eerste zicht heeft deze vraag weinig te maken met de huistaak, maar niets is minder waar...*)
- **(Taak 5)** Zij $k$ een veld, $A = k[X,Y]$ en $\mathfrak{m} = (X,Y)$. Zij $M$ een $A$-module. Laat zien dat $\mathrm{Ext}^2_A(A/\mathfrak{m}, M) \cong M/\mathfrak{m}M$.

---

# Schriftelijk gedeelte

### Opgave 1 - Voortbrengers en relaties

Bekijk de Abelse groep $G$ met als voortbrengers $a$, $b$, $c$ en $d$ en met relaties $4a + 6b = 6c = 6b - 2d = 3b - 3c - d = 0$. Schrijf $G$ als directe som van cyclische, primaire deelgroepen en geef expliciet een voortbrenger voor elke factor.

**Opgave 2 - Eindig gepresenteerde modulen over een lokale ring**

Zij $R$ een ring. We zeggen dat een $R$-module $M$ *eindig gepresenteerd* is als er een exacte rij van homomorfismen van $R$-modulen van de vorm $R^s \to R^t \to M \to 0$ bestaat, met $s, t \in \mathbb{N}$. Uiteraard is een dergelijke $R$-module eindig voortgebracht.

(a) Bewijs dat indien $R$ Noethers is, elke eindig voortgebrachte $R$-module ook eindig gepresenteerd is.

(b) Stel nu dat $M$ een eindig gepresenteerde $R$-module is (maar $R$ is willekeurig, i.h.b. niet noodzakelijk Noethers!). Bewijs dat voor elk surjectief $R$-module-homomorfisme $f : R^n \to M$ geldt dat $\ker f$ eindig voortgebracht is. ($\star$)

Het doel van deze opgave is om het volgende resultaat te bewijzen:

*Zij $R$ een lokale ring en zij $M$ een platte, eindig gepresenteerde $R$-module. Dan is $M$ vrij.*

Omdat vrije modulen projectief zijn, en projectieve modulen plat, betekent dit dat de noties “vrij”, “projectief” en “plat” samenvallen voor eindig gepresenteerde modulen over een lokale ring. Zij $R$ dus een willekeurige lokale ring met maximaal ideaal $\mathfrak{m}$ (cfr. opgavenbundel). Noteer $k = R/\mathfrak{m}$ voor het residuveld en zij $M$ een eindig gepresenteerde platte $R$-module.

(c) Leg zeer bondig uit waarom $M/\mathfrak{m}M$ een eindigdimensionale $k$-vectorruimte is. ($\circ$)

Zij $d = \dim_k(M/\mathfrak{m}M)$. Neem $m_1, \cdots, m_d \in M$ zodat $m_1 + \mathfrak{m}M, \cdots, m_d + \mathfrak{m}M$ een $k$-basis is van $M/\mathfrak{m}M$.

(d) Verifieer dat $M$ als $R$-module wordt voortgebracht door $m_1, \cdots, m_d$. Gebruik daarvoor het lemma van... ($\circ$)

Bekijk nu het homomorfisme van $R$-modulen $\varphi : R^d \to M : (r_1, \cdots, r_d) \mapsto r_1 m_1 + \cdots + r_d m_d$. Noteer ook $K = \ker \varphi$. Bijgevolg is $0 \to K \to R^d \to M \to 0$ exact (merk op dat $\varphi$ surjectief is omdat $M$ wordt voortgebracht door $m_1, \cdots, m_d$).

(e) Bepaal $\mathrm{Tor}_1^R(M, k)$. ($\circ$)

(f) Leid uit het gegeven kort exact rijtje een nieuw kort exact rijtje $0 \to K/\mathfrak{m}K \to k^d \to M/\mathfrak{m}M \to 0$ af.

(g) Toon aan dat $\varphi : R^d \to M$ een isomorfisme is. ($\star$)

Bijgevolg is $M \cong R^d$ inderdaad een vrije module.

**Opgave 3 - De constructie van lokale cohomologie**

Het onderstaande tekstje schetst de constructie van functoren $H^n_{\mathfrak{a}}(-)$ die in zekere zin de “diepte” van een $R$-module ten opzichte van een ideaal $\mathfrak{a}$ van $R$ meten. De bedoeling is om de cursief gedrukte fragmenten in detail te verantwoorden.

> Zij $R$ een Noetherse ring en zij $\mathfrak{a}$ een ideaal van $R$. We definiëren $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \{m \in M \mid \exists n \in \mathbb{N} : \mathfrak{a}^n m = 0\}$ voor elke $R$-module $M$. Indien $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = M$, dan zeggen we dat $M$ een $\mathfrak{a}$-torsiemodule is. We *definiëren nu op natuurlijke wijze een covariante functor $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ van de categorie van $R$-modulen naar zichzelf* ($\circ$). Deze functor is *links exact* ($\circ$), maar *in het algemeen niet exact*. We kunnen nu rechtsafgeleide functoren $H^n_{\mathfrak{a}}(-)$ van $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ definiëren. Voor elke $R$-module $M$ geldt *dat de modulen $H^n_{\mathfrak{a}}(M)$ allemaal $\mathfrak{a}$-torsiemodulen zijn*. Als $I$ een injectieve $R$-module is, dan is ook $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$ een injectieve $R$-module - hiervoor is de voorwaarde dat $R$ Noethers is (die nergens anders moet worden gebruikt) cruciaal. Bijgevolg *heeft elke $\mathfrak{a}$-torsiemodule een injectieve resolutie waarvan alle termen $\mathfrak{a}$-torsiemodulen zijn* ($\star$). Daaruit volgt dat *voor elke $R$-module $M$ die $\mathfrak{a}$-torsie is en voor elke $n \geq 1$ geldt dat $H^n_{\mathfrak{a}}(M) = 0$*. Als nu $M$ een $R$-module is en als $N$ een $\mathfrak{a}$-torsie-deelmodule is van $M$, *dan geldt bijgevolg dat $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M/N) \cong \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)/\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$ en $H^n_{\mathfrak{a}}(M) \cong H^n_{\mathfrak{a}}(M/N)$ voor alle $n \geq 1$.*

---