Meetkunde 1 Examen

16 januari 2017

Theorie

1.
   - Definieer een spiegeling in $\mathbb{E}^n$.
   - Toon aan dat een spiegeling van $\mathbb{E}^n$ een isometrie is.
   - Wanneer is een spiegeling oriëntatiebewarend of oriëntatieomkerend? Toon aan.
2. Zij $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^2$ een booglengtegeparametriseerde kromme.
   - Geef en bewijs de formules van Frenet.
   - Toon aan dat de absolute waarde van de georiënteerde kromming een Euclidische invariant is.
   - Toon aan dat als $\beta(s) \cdot \beta'(s) = 0$, β een (deel van een) cirkel is.

Oefeningen

1. Zij l en l' twee parallelle rechten in $\mathbb{A}^2$. Stel dat $A, B, C \in l$ en $A', B', C' \in l'$ verschillende punten zijn en $AB' \parallel A'B$,$BC' \parallel B'C$. Toon aan dat $(A, B, C) = (A', B', C')$.
   - analytisch
   - synthetisch
2. Waar of niet waar? Argumenteer waarom.
   - De afbeelding $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3 : (p_1, p_2, p_3) \mapsto (-p_1, 2016 + p_3, 2017 - p_2)$ is een draaispiegeling.
   - Neem een rotatie K met as l en een spiegeling R_H in een vlak H in $\mathbb{E}^3$. Als l loodrecht staat op H, dan commuteren K en R_H.
3. Beschouw een booglengtegeparametriseerde kromme β in $\mathbb{E}^3$ met $\kappa > 0$, $\tau \neq 0$ en Frenet-stelsel (T, N, B). Definieer de kromme γ als
$$\gamma(s) = \beta(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s) + (\frac{1}{\kappa(s)})'\frac{1}{\tau(s)}B(s)$$
   Toon aan dat γ een cilinderschroeflijn is als en slechts als β een cilinderschroeflijn is.
   Hint : Reken de term $\nu = \frac{\tau}{\kappa} + ((\frac{1}{\kappa})'\frac{1}{\tau})'$ en zijn afgeleiden niet uit.
4. Zij $x : (0, 1) \times (0, 1) \to \mathbb{E}^3 : (u, v) \mapsto x(u, v)$ een patch. Beschouw $E = x_u \cdot x_u$, $F = x_u \cdot x_v$ en $G = x_v \cdot x_v$.
   - Link volgende 4 differentiaalvergelijkingen aan volgende 4 uitspraken.
     (a) $E_u = 0$ (A) De u-coördinaatlijnen hebben constante snelheid.
     (b) $E_v = 0$ (B) Alle u-coördinaatlijnen hebben dezelfde snelheidsfunctie.
     (c) $G_u = 0$ (C) De v-coördinaatlijnen hebben constante snelheid.
     (d) $G_v = 0$ (D) Alle v-coördinaatlijnen hebben dezelfde snelheidsfunctie.
   - Stel nu dat $E_v = 0 = G_u$. Toon nauwkeurig aan dat er een herparametrisatie $\tilde{x}(u, v) = x(a(u), b(v))$ bestaat zodat $\tilde{x_u} \cdot \tilde{x_u} = 1 = \tilde{x_v} \cdot \tilde{x_v}$ en $\tilde{x_u} \cdot \tilde{x_v} = \cos\theta$ met $\theta(u, v)$ de hoek tussen de u- en v-coördinaatlijn in $x(u, v)$.