1 Examen Meetkunde 2 - Woensdag 27 juni 2012

1.1 Mondeling

1. Formuleer de fundamentaalstelling van de projectieve meetkunde en leg uit hoe ze gebruikt kan worden om projectieve coördinaten tov. een willekeurige projectieve ijk in te voeren.

   Bijvraag: Als je een projectieve ijk $\{F_0, \ldots, F_{n+1}\}$ hebt in $P(V)$, heeft elke F_i een representant f_i in V. We definiëren de coördinaten van $X = [x] \in P(V)$ als de unieke $x_0, \ldots, x_n$ waarvoor $x = \sum_i x_i f_i$. Komt dit op hetzelfde neer, en zo niet, los het probleem op dat zich stelt.

2. Zij H een vlak en M een oppervlak in $\mathbb{E}^3$. H en M snijden elkaar in een booglengte-geparametriseerde kromme α. H en M snijden elkaar met een constante hoek (dwz. de normalen op H en M maken een constante hoek langs α). Toon aan dat α een hoofdkromme is van M (dwz dat $a'(s)$ een hoofdrichting is van M voor elke s).

1.2 Schriftelijk

1. We werken in $\mathbb{C}P^3$. We zeggen dat een rechte ℓ steunt op een gegeven aantal andere rechten als ℓ elk van die rechten snijdt.

   (a) Toon aan dat twee rechten die steunen op drie kruisende rechten, ook kruisende rechten zijn.

   (b) Gegeven drie kruisende rechten a, b, c. Zij $\sigma \in \mathbb{C}$ met $\sigma \neq 0, 1$. Voor elke rechte ℓ die steunt op a, b en c noemen we de snijpunten $A = \ell \cap a, B = \ell \cap b, C = \ell \cap c$ en we nemen D op ℓ zodat $(A, B, C, D) = \sigma$. Toon aan dat alle punten D die we zo vinden, op een vaste rechte d liggen die a, b, c kruist. *Hint:* Gebruik meermaals de transversaliteitseigenschap voor bundels.

2. In poolcoördinaten wordt het vierbladig rozet in $\mathbb{E}^2$ gegeven door $r^2 = a^2 sin^2(2\theta)$, met $a \in \mathbb{R}_0^+$.

   (a) Beschouw deze kromme projectief en toon aan dat het een algebraïsche kromme van graad 6 is in $\mathbb{C}P^2$.

   (b) Zoek en bespreek alle meervoudige punten van deze kromme. *Hint:* gebruik eventueel coördinatentransformaties om de aard van de meervoudige punten te bepalen.

   (c) Maak een ruwe schets van het rozet.

3. Zij M een oppervlak in $\mathbb{E}^3$ met parametrisatie $x : U \to M$ en zij ξ de eenheidsnormaal op $x(U)$. We definieren $\bar{x}$ door $\bar{x}(u, v) = x(u, v) + a\xi(u, v)$.

   (a) Toon aan dat $\bar{x_u} \times \bar{x_v} = J(u, v) \cdot (x_u \times x_v)$ met $J(u, v) = 1 - 2Ha + Ka^2$, waarbij H en K de gemiddelde en de Gausskromming voorstellen.

   (b) Veronderstel dat $\bar{x}$ een parametrisatie is en dat $\bar{M} = \bar{x}(U)$ een oppervlak is. Noteer de gemiddelde kromming, de Gausskromming en de Shape-operator van $\bar{M}$ door $\bar{H}, \bar{K}$ resp. $\bar{S}$. Toon aan dat $S(x_u) = \bar{S}(\bar{x}_u)$ en $S(x_v) = \bar{S}(\bar{x}_v)$

   (c) Leid hieruit af dat $\bar{K} = \frac{K}{J}, \bar{H} = \frac{H - Ka}{J}$.