Meetkunde I

(31/01/2009)

Theorie

$\boxed{1}$ Bewijs dat elke isometrie in $\mathbb{E}^2$ een translatie, een rotatie of een schuifspiegeling is.

$\boxed{2}$ Definieer het Frenet-referentiestelsel voor booglengtegeparametriseerde vlakke krommen en leid de formules van Frenet af.

Oefeningen

$\boxed{1}$ We noemen vier rechten in $\mathbb{A}^2$ een volledige vierzijde als er geen drie van concurrent zijn. De snijpunten van de rechten noemen we de hoekpunten en twee hoekpunten zijn overstaande hoekpunten als ze niet tot eenzelfde rechte behoren. Bewijs dat in een volledige vierzijde met zes hoekpunten de middens van de lijnstukken die overstaande hoekpunten verbinden, collineair zijn.

$\boxed{2}$ Beschouw in $\mathbb{E}^4$ het vlak π en de rechte l gegeven door

$$\pi \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad l \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bewijs dat π en l kruisend zijn en bepaal hun gemeenschappelijke loodlijn.

$\boxed{3}$ Beschouw de kromme $\alpha(t) = (at, bt^2, t^3)$ met $a, b \in \mathbb{R}$. Toon aan dat α een cilinderschroeflijn is als en slechts als $4b^4 = 9a^2$. Vind in het geval dat α een cilinderschroeflijn is een constante eenheidsvector u zodat $T \cdot u$ constant is.

$\boxed{4}$ Beschouw twee verschillende reguliere krommen $\alpha, \beta : I \to \mathbb{E}^3$ met $\kappa_\alpha \neq 0 \neq \kappa_\beta$. Stel verder dat α booglengtegeparametriseerd is en dat voor elke $s \in I$ geldt dat de rechte door $\alpha(s)$ en met de hoofdnormaal $N_\alpha(s)$ als richting samenvalt met de rechte door $\beta(s)$ en met de hoofdnormaal $N_\beta(s)$ als richting.

(a) Bewijs dat $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda N_\alpha(s)$ voor alle $s \in I$ en een constante $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$.

(b) Bewijs dat de hoek tussen $\alpha'(s)$ en $\beta'(s)$ constant is.

(c) Toon nu aan dat als voor α geldt dat $\kappa\tau \neq 0$, dat er dan constanten a en b bestaan zodat $a\kappa + b\tau = 1$.