Meetkunde II

June 23, 2017

1 Mondeling gedeelte

1.1 Algebraïsche krommen

Beschouw een willekeurige niet-ontaarde algebraïsche kromme C van de derde graad die een buigpunt heeft.

- Bewijs dat de vergelijking van de kromme, na een gepaste projectieve transformatie, als volgt kan worden opgeschreven:

$$C \longleftrightarrow x_0x_2^2 + ax_0^2x_2 + bx_0x_1x_2 = cx_0^3dx_0x_1^2 + ex_0^2x_1 + fx_1^3 \tag{1}$$

- Bewijs dat, na een tweede projectieve transformatie, de vergelijking verder vereenvoudigd kan worden tot $C \longleftrightarrow x_0x_2^2 = x_1^3 + \alpha x_0x_1^2 + \beta x_0^2x_1 + \gamma x_0^3$, en dat de affiene versie van de kromme dus gegeven wordt door $C' \longleftrightarrow y^2 = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
- Bewijs dat alle mogelijke meervoudige punten van C' op de x-as liggen en dat een punt $(r, 0)$ een meervoudig punt is van C' als en slects als r een oplossing is van de vergelijking $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

1.2 Differentiaalmeetkunde

Beschouw een oppervlak $M \in \mathbb{E}^3$. Definieer voor vaste $r \in \mathbb{R}$ de afbeelding $F_r : M \to \mathbb{E}^3 : p \mapsto p + rN(p)$, met N een eenheidsnormaal vectorveld op M. Noem S de Shape-operator op M geassocieerd aan N, en K en H respectievelijk de Gauskromming en gemiddelde kromming van M. Bewijs achtereenvolgens:

- $\forall p \in M, \forall v \in T_pM : (F_r)_\star v = v + rSv$.
- $\forall v, w \in T_pM : (F_r)_\star v \times (F_r)_\star w = J_r v \times w$, met

$$J_r = 1 - 2rH(p) + r^2K(p) \tag{2}$$

- $N_r(F_r(p)) = N(p)$ is een eenheidsnormaal vectorveld op $F_r(M)$, en de geassocieerde shape-operator is $S_r((F_r)_\star v) = Sv$.
- De Gauskromming en gemiddelde kromming van $F_r(M)$ worden gegeven door:

$$K_r = \frac{K}{J_r} \qquad H_r = \frac{H - rK}{J_r} \tag{3}$$

2 Schriftelijk gedeelte

2.1 Projectieve meetkunde

Beschouw de projectieve rechte $\mathbb{R}P^1$. We definiëren een involutie ϕ als een projectieve transformatie waarvoor geldt dat $\phi^2 = Id \neq \phi$.

- Bewijs dat een projectieve transformatie ϕ van $\mathbb{R}P^1$ een involutie als en slechts als er een $A \in \mathbb{R}P^1$ bestaat zodat $\phi(\phi(A)) = A$ en $\phi(A) \neq (A)$. (hint: Na projectieve transformatie kan je stellen dat $A = [(O, 1)])$
- Bewijs dat er voor twee punten $A, B \in \mathbb{R}P^1$ een unieke involutie bestaat die A en B als vaste punten heeft.
- Bewijs dat er voor die unieke involutie voor elk punt $P \in \mathbb{R}P^1$ dat verschillend is van A en B geldt dat de tweetallen $\{A, B\}$ en $\{P, \phi(P)\}$ elkaar harmonisch scheiden.

2.2 Algebraïsche krommen

We beschouwen de algebraïsche kromme $C \longleftrightarrow (x_1^2 + x_2^2)^2 + 4x_0x_1(x_1^2 + x_2)^2 + x_0^2x_1(x_1 - x_2) \subset \mathbb{R}P^2$.

- Bewijs dat E_0 een dubbel punt is van C
- Bepaal de rakende kegel aan E_0
- Toon aan dat de rechte $x_0 = 0$ de kromme C snijdt in twee dubbelpunten.
- Toon aan dat C geen raaklijn heeft die door die twee snijpunten gaat.

2.3 Differentiaalmeetkunde

Bereken de hoofdkrommingen en de hoofdrichtingen in een willekeurig punt (a, b, c) van het oppervlak $M = \{(x_1, x_2, x_3) \ \in \mathbb{E}^3 | x_3 = x_1x_2\}$.