

Examen Meetkunde II - 19 juni 2020

Naam en voornaam:

- Toegelaten materiaal:
 - de cursustekst “Meetkunde II” (twee delen),
 - eigen handgeschreven nota’s,
 - de nota’s van de online hoorcolleges ter beschikking gesteld op Toledo,
 - eventueel een niet-grafisch rekentoestel.
 - Formuleer je antwoorden duidelijk en volledig.
 - Je mag stellingen en resultaten uit de cursus gebruiken mits verwijzing; resultaten van oefeningen mag je enkel gebruiken als je ook de oplossing van die oefening schetst.
 - Vouw dit blad rond je oplossingen bij het afgeven.
-

1. Veronderstel dat twee derdegraadskrommen in $\mathbb{CP}^2$ elkaar snijden in 9 punten. Als er een rechte bestaat die precies 3 van deze punten bevat, dan liggen de overige 6 op een kegelsnede. Bewijs.

Hint: Een mogelijke strategie begint met aantonen dat er een derdegraadskromme bestaat door de 9 punten, die nog een 4e punt van de rechte bevat.

2. Gegeven zijn de parabool $\mathcal{C}_1 \leftrightarrow x^2 - y = 0$ en de hyperbool $\mathcal{C}_2 \leftrightarrow xy - 1 = 0$ in $\mathbb{A}^2$. Beschouw alle verbindingslijnstukken van punten van $\mathcal{C}_1$ met punten van $\mathcal{C}_2$, die bovendien parallel zijn met de y -as. De *drietand van Newton* is per definitie de verzameling van de middens van al deze lijnstukken.

- (a) Toon aan dat de drietand van Newton een algebraïsche kromme in $\mathbb{A}^2$ is.

We noteren deze kromme met $\mathcal{C}$ en de overeenkomstige kromme in $\mathbb{CP}^2$ met $\tilde{\mathcal{C}}$.

- (b) Schets de krommen $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ en $\mathcal{C}$ in eenzelfde figuur op basis van hun definities.

- (c) Bereken de meervoudige punten van $\mathcal{C}$ en van $\tilde{\mathcal{C}}$.

- (d) Bereken de buigpunten van $\mathcal{C}$ en van $\tilde{\mathcal{C}}$.

- (e) Aan welke kromme uit de cursus is $\tilde{\mathcal{C}}$ op een projectieve transformatie na gelijk?

3. Toon aan dat het dubbelperiodiek oppervlak van Scherk,

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 \mid e^{x_3} \cos x_1 = \cos x_2\},$$

wel degelijk een oppervlak is en dat het bovendien minimaal is.

Opmerking: In Voorbeeld 29 op pagina 102 van het tweede deel van de cursus wordt dit beweerd zonder bewijs. Het is uiteraard niet voldoende om hiernaar te verwijzen.

4. Deze opgave gaat over de *Mercatorprojectie*. Voor de eenvoud modelleren we het aardoppervlak als een sfeer met straal 1 en middelpunt in de oorsprong en we bekijken de volgende patch:

$$x : U = (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2(1) : (u, v) \mapsto (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v).$$

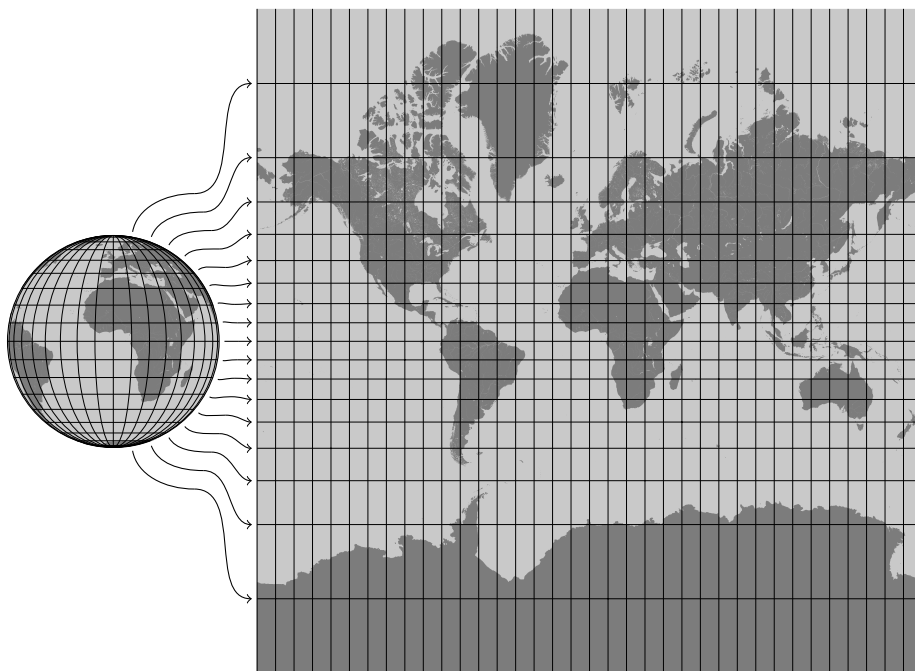
De coördinaten u en v zijn dus de gekende lengte- en breedtegraden (maar dan wel gemeten in radialen in plaats van in graden) en het beeld van x is de hele sfeer min een halve grote cirkel (die in de praktijk overeenkomt met de datumgrens). De Mercatorprojectie is een afbeelding van de vorm

$$\phi : x(U) \rightarrow \mathbb{E}^2 : x(u, v) \mapsto (u, f(v)).$$

De afbeelding beeldt een punt dus niet gewoon af op zijn lengte- en breedtegraden, maar transformeert de breedtegraad. Mercator koos de functie f zo dat de afbeelding ϕ *conform* is, wat betekent dat er een strikt positieve functie $\lambda : x(U) \rightarrow \mathbb{R}$ bestaat zodat

$$(\phi_*)_p w_1 \cdot (\phi_*)_p w_2 = \lambda(p)(w_1 \cdot w_2)$$

voor alle $p \in x(U)$ en alle $w_1, w_2 \in T_p x(U)$.



(a) Vind zo'n mogelijke functie $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$.

(b) Is de Mercatorprojectie met die f een lokale isometrie? Leg uit.

Hint: Mercator construeerde zijn kaart in 1569 zonder een functievoorschrift voor f neer te schrijven. De logaritme werd immers pas geïntroduceerd in de zeventiende eeuw...

Veel succes!