Meetkunde II

8 Juni 2015

Mondeling gedeelte

$\boxed{\mathbf{1}}$ Beschouw een rechte l en een algebraïsche kromme $V(f)$ in $\mathbb{C}P^2$.

a) Leg uit wat men bedoeld met de *snijpuntsmultipliciteit* van $l \cap V(f)$. Definieer hiermee wat een *meervoudig punt* is en leg de termen *raaklijn* en *hoofdraaklijn* uit.

b) Hoe kan men aan de vergelijking van de kromme zien of het punt $E_0 = [(1,0,0)]$ een dubbelpunt is? Bewijs nauwkeurig.

$\boxed{\mathbf{2}}$ In deze vraag gaan we aantonen dat er geen compacte minimale oppervlakken zijn in $\mathbb{E}^3$.

a) Beschouw een compact oppervlak M in $\mathbb{E}^3$. Zij $f : M \to \mathbb{R} : p \mapsto ||p||^2 = p \cdot p$ een differentieerbare functie. Zij $x : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to M$ een patch zo dat $p \in x(U)$. Dan is $f \circ x : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continu en bijgevolg bereikt $f \circ x$ een maximum, zeg in (u_0, v_0). Noem $p_0 = x(u_0, v_0)$. Dan is p_0 dus het punt van M dat het verst ligt van de oorsprong. Leidt hieruit af dat (de positievector) p_0 loodrecht staat op $T_{p_0}M$.

b) Argumenteer dat, na eventueel de parameters om te wisselen, $\xi(u_0, v_0) = \dfrac{p_0}{||p_0||}$.

c) Zij $w = w_1 x_u(u_0, v_0) + w_2 x_v(u_0, v_0)$ een vector in $T_{p_0}M$. Bewijs de ongelijkheid

$$w_1^2 l(u_0, v_0) + 2w_1 w_2 m(u_0, v_0) + w_2^2 n(u_0, v_0) \leq -\frac{||w||^2}{||p_0||}$$

waarbij l, m en n gedefinieerd zijn zoals in *Lemma 15* op p.215 van de cursus.

c) Leidt hieruit af dat voor een eenheidsvector $w \in T_{p_0}M$ geldt dat

$$k(w) \leq -1/||p_0||$$

d) Besluit dat M niet minimaal is.

Schriftelijk gedeelte

$\boxed{\mathbf{3}}$ Zij P_1 en P_2 twee projectieve deelruimten van KP^n, zodat *dim($P_1 + P_2$)* minstens gelijk is aan 1. Bewijs dat de projectieve deelruimte $P_1 + P_2$ gelijk is aan de unie van alle rechten die zowel P_1 als P_2 snijden (in verschillende punten).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Beschouw de twee algebraïsche krommen $C_1 \longleftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - y^2 = 0$ en $C_2 \longleftrightarrow x^2 + 2x + y^2 = 0$

a) Bepaal de meervoudige punten van C_1 en de hoofdraaklijnen.

b) Bepaal een rationale parametrisatie van C_1.

c) Bereken de snijpunten $C_1 \cap C_2$.

d) Wat zegt de stelling van Bezout over het aantal snijpunten van $C_1 \cap C_2$? Verklaar eventueel waarom je niet exact dit aantal bekomt.

e) Maak een schets van beide krommen en hun snijpunten.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Zij $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2, x_3 \geq 0\}$.

a) Bewijs dat V geen oppervlak is maar $M = V \setminus (0,0,0)$ wel.

b) Bewijs dat er een eenheidsvectorveld N op M bestaat zodat $N(p) = (V_1(p), V_2(p), 1/\sqrt{2})$ voor elke $p \in M$, met V_1 en V_2 gewone differentieerbare functies zijn.

c) Bewijs dat M een plat oppervlak is.

d) Bewijs dat de gemiddelde kromming $H(p)$ in elk punt p van M enkel afhangt van de afstand $||p||$ van p tot de oorsprong $(0,0,0)$.