Examen Meetkunde I

Naam en voornaam: ....

Richting: ....

Vouw dit opgaveblad rond je oplossingen bij het afgeven van de oefeningen.

Theorie

1. (a) Definieer het begrip spiegeling tegenover een Euclidische deelruimte van $\mathbb{E}^n$.
   (b) Toon aan dat elke spiegeling een isometrie is.
   (c) Verifieer dat elke translatie van $\mathbb{E}^n$ kan geschreven worden als de samenstelling van twee spiegelingen tegenover parallelle hypervlakken van $\mathbb{E}^n$.

2. (a) Definieer het begrip rotatie-index van een gesloten vlakke kromme.
   (b) Wat is het verband tussen de rotatie-index en de georiënteerde kromming van een booglengtegeparametriseerde gesloten vlakke kromme en hoe verandert dit verband als de kromme regulier is maar niet noodzakelijk booglengtegeparametriseerd? Bewijs je antwoorden.
   (c) Bepaal de rotatie-index van de kromme $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^2 : t \mapsto (\sin(2t), \cos(3t))$.

Oefeningen

1. Zij ABC een driehoek in $\mathbb{A}^2$ en P en Q punten op respectievelijk AB en AC zodat de rechten PQ en BC parallel zijn. Toon analytisch en synthetisch aan: als de rechten PC en QB niet parallel zijn, dan snijden ze elkaar in een punt op de zwaartelijn door A.

2. Gegeven zijn twee rechten in $\mathbb{E}^3$:

$$l_1 \leftrightarrow \begin{cases} x+y+3z=2 \\ 3x-y+z=2 \end{cases} \qquad \text{en} \qquad l_2 \leftrightarrow \begin{cases} 7x-2y-z=-2 \\ 5x-y-z=-1. \end{cases}$$

   (a) Toon aan dat de rechten l_1 en l_2 kruisend zijn.
   (b) Bepaal de gemeenschappelijke loodlijn van l_1 en l_2.
   (c) Bepaal de afstand tussen de rechten l_1 en l_2.

3. Zij $I \subseteq \mathbb{R}$ een open interval, $a \in I$ en $Y : I \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto Y(t)$ een differentieerbare afbeelding zodat voor elke $t \in I$ geldt dat $Y(t)$, $Y'(t)$ en $Y''(t)$ lineair onafhankelijk zijn en dat $\|Y(t)\| = 1$. Definieer voor een willekeurige $c \in \mathbb{R}_0$ de kromme

$$\alpha : I \to \mathbb{E}^3 : t \mapsto c \int_a^t (Y(u) \times Y'(u))\, du,$$

   waarbij de integraal componentsgewijs genomen wordt. Toon aan dat α constante torsie $1/c$ heeft.

Veel succes!