Examen Meetkunde I

Naam en voornaam: ....

Richting: ....

Vouw dit opgaveblad rond je oplossingen bij het afgeven van de oefeningen.

1 Theorie

1. (a) Definieer de begrippen spiegeling en schuifspiegeling tegenover een Euclidische deelruimte S van $\mathbb{E}^n$.
   (b) Toon aan dat elke oriëntatieomkerende isometrie van $\mathbb{E}^2$ een schuifspiegeling is.
   (c) In de classificatie van de isometrieën van $\mathbb{E}^3$ staan enkel schuifspiegelingen tegenover een vlak expliciet vermeld. Waarom worden schuifspiegelingen waarvoor $\dim S$ respectievelijk 0, 1 of 3 is niet vermeld?

2. In deze vraag ontwikkelen we Frenet-theorie voor krommen in de sfeer

$$\mathbb{S}^2 := \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{E}^3 \mid p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1\}.$$

Voor $p \in \mathbb{S}^2$ definiëren we het raakvlak aan $\mathbb{S}^2$ in p als de volgende deelruimte van $T_p\mathbb{E}^3$:

$$T_p\mathbb{S}^2 := \{v_p \in T_p\mathbb{E}^3 \mid v \cdot p = 0\}.$$

De unie van alle raakvlakken aan $\mathbb{S}^2$ noteren we met $T\mathbb{S}^2$ en we definiëren de volgende complexe structuur:

$$J : T\mathbb{S}^2 \to T\mathbb{S}^2 : v_p \mapsto Jv_p := (p \times v)_p.$$

Zij $\beta : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{E}^3 : s \mapsto \beta(s)$ een booglengtegeparametriseerde kromme in $\mathbb{E}^3$, waarvan het beeld in $\mathbb{S}^2$ ligt. Voor een vectorveld $Y : I \to T\mathbb{S}^2 : s \mapsto Y(s) \in T_{\beta(s)}\mathbb{S}^2$ langs β definiëren we het vectorveld $\nabla Y : I \to T\mathbb{S}^2$ langs β als volgt: $(\nabla Y)(s)$ is de orthogonale projectie van $Y'(s) \in T_{\beta(s)}\mathbb{E}^3$ op $T_{\beta(s)}\mathbb{S}^2$.

Toon achtereenvolgens de volgende uitspraken aan:

(a) $T_{\mathbb{S}^2}(s) := \beta'(s)$ behoort tot $T_{\beta(s)}\mathbb{S}^2$ voor elke $s \in I$.

(b) Als $N_{\mathbb{S}^2}(s) := JT_{\mathbb{S}^2}(s)$, dan is $\{T_{\mathbb{S}^2}(s), N_{\mathbb{S}^2}(s)\}$ een orthonormale basis van $T_{\beta(s)}\mathbb{S}^2$.

(c) Er bestaat een functie $\kappa_{\mathbb{S}^2} : I \to \mathbb{R}$ zodat $\nabla T_{\mathbb{S}^2} = \kappa_{\mathbb{S}^2} N_{\mathbb{S}^2}$ en $\nabla N_{\mathbb{S}^2} = -\kappa_{\mathbb{S}^2} T_{\mathbb{S}^2}$.

(d) Het Frenet-apparaat van β, gezien als kromme in $\mathbb{E}^3$, is gegeven door

$$T = T_{\mathbb{S}^2}, \qquad N = \frac{\kappa_{\mathbb{S}^2} N_{\mathbb{S}^2} - \beta}{\sqrt{1 + \kappa_{\mathbb{S}^2}^2}}, \qquad B = \frac{N_{\mathbb{S}^2} + \kappa_{\mathbb{S}^2}\beta}{\sqrt{1 + \kappa_{\mathbb{S}^2}^2}},$$

$$\kappa = \sqrt{1 + \kappa_{\mathbb{S}^2}^2}, \qquad \tau = \frac{\kappa_{\mathbb{S}^2}'}{1 + \kappa_{\mathbb{S}^2}^2}.$$

2 Oefeningen

1. Zij ABC een driehoek in $\mathbb{E}^2$ en $\mathcal{C}$ de ingeschreven cirkel van de driehoek ABC. De cirkel $\mathcal{C}$ raakt de zijden BC, CA en AB respectievelijk in A', B' en C'. De rechte door B' en C' snijdt de rechte BC in A''. Toon aan dat $(A', B, C) = -(A'', B, C)$.

2. (a) Bepaal de doorsnede van de volgende vlakken in $\mathbb{A}^4$:

$$\pi_1 \leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 2z - 3t = 1 \\ 4x + 7y - 4z - 7t = 3 \end{cases} \quad \text{en} \quad \pi_2 \leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y - z - 3t = 7 \\ 5x + 5y - 2z - 3t = 8. \end{cases}$$

   (b) Bepaal de kleinste affiene deelruimte van $\mathbb{A}^4$ die deze doorsnede omvat en zwak parallel is met de rechten

$$l_1 \leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + z - t = 0 \\ 2x + 3y - t = 4 \\ x + z - t = 0 \end{cases} \quad \text{en} \quad l_2 \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 1 + 5\lambda \\ t = 1 + 7\lambda. \end{cases}$$

3. Vind alle booglengtegeparametriseerde krommen $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3 : s \mapsto \beta(s)$ met strikt positieve kromming die voldoen aan één van de volgende voorwaarden:

   (a) $T(s) = (\cos s, \sin s, 0)$,

   (b) $N(s) = (\cos s, \sin s, 0)$,

   (c) $B(s) = (\cos s, \sin s, 0)$.

Veel succes!