Examen Meetkunde I

Naam en voornaam: ....

Richting: ....

Vouw dit opgaveblad rond je oplossingen bij het afgeven van de oefeningen.

1 Theorie

1. We definiëren een rotatie van $\mathbb{E}^4$, naar analogie met de situaties in $\mathbb{E}^2$ en $\mathbb{E}^3$, als een afbeelding van de vorm $F : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4 : p \mapsto x_0 + A(\overrightarrow{x_0 p})$, met $x_0 \in \mathbb{E}^4$ en $A \in \mathrm{SO}(4) \setminus \{I\}$.
   (a) Zij F een rotatie van $\mathbb{E}^4$ en $V(F)$ de verzameling vaste punten van F. Toon aan dat $V(F)$ een Euclidische deelruimte van $\mathbb{E}^4$ is en dat $\dim V(F) \in \{0, 2\}$.
   (b) Geef een classificatie van de oriëntatiebewarende isometrieën van $\mathbb{E}^4$ en bewijs je antwoord.

2. Definieer de georiënteerde kromming van een booglengtegeparametriseerde kromme in $\mathbb{E}^2$ en toon aan dat zo'n kromme een deel van een cirkel is als en slechts als de georiënteerde kromming een constante functie verschillend van nul is.

2 Oefeningen

1. Zij ABC een driehoek in $\mathbb{A}^2$ en P, Q en R de middens van respectievelijk AB, BC en AC. De rechten AL, BM en CN zijn concurrent en snijden de overstaande zijden van de driehoek ABC in respectievelijk L, M en N. Veronderstel dat $PM \cap BC = \{H\}$, $QN \cap AC = \{I\}$ en $RL \cap AB = \{J\}$. Toon aan dat H, I en J collineair zijn.

2. Bepaal een rechte in $\mathbb{E}^3$ die loodrecht staat op het vlak $\pi \leftrightarrow z = 0$ en die de rechten
$$l \leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \text{en} \quad l' \leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$
snijdt. Hoeveel rechten voldoen aan deze voorwaarden?

3. Zij $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ een booglengtegeparametriseerde, gesloten kromme met lengte L en strikt positieve kromming. Zij X een eenheidsnormaal vectorveld langs β, i.e., een vectorveld langs β waarvoor $X(s) \cdot T(s) = 0$, $\|X(s)\| = 1$ en $X(s + L) = X(s)$ voor elke $s \in \mathbb{R}$. Stel
$$tw(\beta, X) := \frac{1}{2\pi} \int_0^L X'(s) \cdot (T(s) \times X(s))\, ds.$$
   (a) Toon aan dat het fractioneel deel van $tw(\beta, X)$ gelijk is aan het fractioneel deel van $\frac{1}{2\pi} \int_0^L \tau(s)\, ds$ en dus onafhankelijk van het gekozen eenheidsnormaal vectorveld X. We noemen het fractioneel deel van $tw(\beta, X)$ de *totale twist* van β.
   Opm.: Het fractioneel deel van een reëel getal x is het unieke reëel getal $\tilde{x} \in [0, 1[$ zodat $x - \tilde{x} \in \mathbb{Z}$.
   (b) Toon aan dat als het beeld van β op een sfeer ligt, de totale twist gelijk is aan 0.

Veel succes!