Examen Meetkunde I

Naam en voornaam: ....

Richting: ....

Vouw dit opgaveblad rond je oplossingen bij het afgeven van de oefeningen.

1 Mondeling gedeelte

1. (a) Definieer spiegeling tegenover een k-dimensionale Euclidische deelruimte van $\mathbb{E}^n$.
   (b) Toon aan dat spiegelingen isometrieën zijn.
   (c) Wanneer is een spiegeling oriëntatiebewarend / oriëntatieomkerend?

2. In het hyperbolisch vlak $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid y > 0\}$, waarbij elke rakende ruimte is uitgerust met het scalair product

$$(v_1, v_2)_{(x,y)} \cdot (w_1, w_2)_{(x,y)} = \frac{1}{y^2}(v_1 w_1 + v_2 w_2),$$

beschouwen we twee verschillende punten $p_1 = (x, y_1)$ en $p_2 = (x, y_2)$ die verticaal boven elkaar liggen. Toon aan dat het lijnstuk tussen p_1 en p_2 de kortste kromme in $\mathbb{H}^2$ is die deze punten verbindt.

2 Schriftelijk gedeelte

1. Gegeven zijn de rechten

$$S \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad T \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{E}^4$.

   (a) Bepaal de onderlinge stand van deze rechten.
   (b) Zoek de gemeenschappelijke loodlijn van S en T met richting $(0, 1, 2, -1)$.
   (c) Bestaat er voor elke $u \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ een rechte met richtingsvector u die S en T snijdt?

2. Gegeven zijn twee niet-parallelle rechten ℓ en m in het affiene vlak $\mathbb{A}^2$ en een punt M dat niet op ℓ of m ligt. Dan bestaan er twee unieke punten $A \in \ell$ en $B \in m$ zodat M het midden is van A en B. Bewijs deze bewering analytisch en synthetisch.

   Hint: Beschouw voor het synthetisch bewijs een gepaste homothetie.

3. In $\mathbb{E}^3$ is F_1 de spiegeling ten opzichte van het yz-vlak, F_2 de translatie over de vector $(1, 1, 1)$ en F_3 een rotatie over 90 graden rond de x-as. Geef alle vaste punten van de isometrie $F = F_1 \circ F_2 \circ F_3$ en classificeer en bespreek F volledig.

4. Beschouw een booglengtegeparametriseerde kromme $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3 : s \mapsto \alpha(s)$ met $\kappa_\alpha > 0$. We definiëren een kromme β in $\mathbb{E}^3$ door

$$\beta(s) = \alpha(s) + B_\alpha(s).$$

(a) Toon aan dat β regulier is en dat β constante snelheid heeft als en alleen als de torsie van α constant is.

(b) Bewijs dat β een cirkelschroeflijn is als α een cirkelschroeflijn is. Geef een expliciete uitdrukking voor de kromming van β in termen van κ_α en τ_α.

(c) Toon aan dat de hoeken tussen T_α en T_β en tussen N_α en N_β constant zijn als α een cirkelschroeflijn is.

Veel succes!