

Examen Meetkunde I

Naam en voornaam:

Richting:

Vouw dit opgaveblad rond je oplossingen bij het afgeven van de oefeningen.

1 Mondeling gedeelte

1. Zij F een oriëntatiebewarende isometrie van $\mathbb{E}^n$ met vaste punten. Toon aan dat $V(F)$, de verzameling van de vaste punten van F , een Euclidische deelruimte van $\mathbb{E}^n$ is en dat $\dim V(F) \equiv n \pmod{2}$.
2. Formuleer en bewijs de congruentiestelling voor booglengtegeparametriseerde krommen in $\mathbb{E}^3$.

2 Schriftelijk gedeelte

1. In $\mathbb{E}^4$ zijn de rechte ℓ en het vlak π gegeven:

$$\ell \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \pi \leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_4 = 1. \end{cases}$$

- (a) Bespreek de onderlinge stand van ℓ en π .
 - (b) Zoek de rechte in π door $(2, 1, -2, 0)$ die orthogonaal is met ℓ .
2. Gegeven zijn twee verschillende halfrechten k en ℓ in $\mathbb{A}^2$ met eenzelfde eindpunt A . Zij $B \in k$ en $C \in \ell$ twee andere punten en M het midden van B en C . Neem een willekeurige rechte m door M , die k en ℓ snijdt in verschillende punten, zeg in B' en C' . Noteer de oppervlaktes van $\triangle ABC$ en $\triangle AB'C'$ respectievelijk met $\mathcal{O}$ en $\mathcal{O}'$.

- (a) Toon aan dat $\mathcal{O} \leq \mathcal{O}'$ voor elke keuze van m .
- (b) Hoewel oppervlakte geen affiene invariant is, mag je de bovenstaande bewering toch analytisch bewijzen. Waarom?

Opmerking: De oppervlakte van $\triangle XYZ$ is de helft van het volume van het parallellogram $P(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ})$.

3. Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

- (a) Dilataties van $\mathbb{E}^n$ bewaren hoeken.
- (b) Een affiene transformatie van $\mathbb{E}^n$ die hoeken bewaart is een isometrie of een dilatie.
- (c) Als α een cilinderschroeflijn is en F een dilatie van $\mathbb{E}^3$, dan is $F \circ \alpha$ ook een cilinderschroeflijn.

4. Zij $\alpha: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{E}^2: t \mapsto \alpha(t)$ een reguliere kromme met strikt positieve kromming κ . Stel dat $\kappa(1) = 1$ en dat de evoluuut van α gegeven wordt door $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.
- (a) Bewijs dat $\kappa(t) = \frac{1}{t}$ en geef $\alpha(t)$ expliciet.
 - (b) Maak een (ruwe) schets van α en γ en leg uit hoe je hiervoor te werk bent gegaan.

Veel succes!
