

Examen Meetkunde I

Duur: 4 uur

27 juni 2024

Gesloten boek

1. (a) Definieer:
 - i. Affiene transformatie
 - ii. Dilatatie
- (b) Vul aan en bewijs: “Een affiene transformatie F is een dilatatatie als en slechts als F een is.”
- (c) Dilataties van $\mathbb{E}^n$ bewaren hoeken: waar of niet waar? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
2. (a) Definieer:
 - i. k -dimensionaal lineair systeem
 - ii. Lineair systeem van hypervlakken
 - iii. As van een lineair systeem van hypervlakken
- (b) Zij Σ^k en Σ^ℓ lineaire systemen met assen P^{n-k-1} en $P^{n-\ell-1}$. Formuleer en bewijs duale wederkerigheid voor Σ^k en Σ^ℓ .

Open boek

3. Gegeven is de isometrie $F : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2 : (x, y) \mapsto (y + 2022, -x - 2024)$.
 - (a) Beschrijf welke isometrie dit is.
 - (b) De afbeelding F is een samenstelling van n spiegelingen. Bepaal de minimale waarde van n en geef de spiegelingen expliciet.
4. Zij $F, G : \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ projectieve transformaties die hetzelfde **uniek** vast punt $P \in \mathbb{R}P^1$ hebben.
 - (a) Toon aan dat F en G commuteren, dus dat $F \circ G = G \circ F$.
 - (b) Geldt hetzelfde in $\mathbb{R}P^2$? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

5. Zij $\alpha, \beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^2$ reguliere krommen die elkaar niet snijden. Zij $\ell(t)$ de rechte bepaald door $\alpha(t)$ en $\beta(t)$ voor alle $t \in I$.

Bewijs dat $\ell(t)$ normaal staat op α in $\alpha(t)$ (d.w.z. $\ell(t)$ staat orthogonaal op de raaklijn aan α in $\alpha(t)$) en raakt aan β in $\beta(t)$ als en slechts als β de evoluut van α is.

6. Zij $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ een booglengtegeparametriseerde kromme met kromming $\kappa > 0$, **constante** torsie $\tau \neq 0$ en Frenetstelsel $\{T, N, B\}$. We definiëren de kromme

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3 : t \mapsto \gamma(t) = -\frac{1}{\tau}N(t) + \int_{t_0}^t B(u) du$$

met $t_0 \in I$. Bereken de kromming en torsie van γ .