

1 Discrete Symmetrieën: 18/01/2010 Voormiddag

Vraag 1:

Kies in een d -dimensionale orthogonale complexe vectorruimte V een orthonormale basis $\{f_i | i = 1, 2, \dots, d\}$. Een lineaire transformatie A heeft als matrixelementen $A_{ij} = \langle f_i, Af_j \rangle$. De complex toegevoegde afbeelding heeft dan natuurlijk als basiselementen $\overline{A_{ij}} = \langle f_i, \overline{Af_j} \rangle$. De notie van toegevoegde afbeelding hangt dus af van de keuze van de orthonormale basis.

1. Toon aan dat complex toegevoegden t.o.v. twee verschillende orthonormale basissen unitair equivalent zijn.
2. Zij U een unitaire representatie van een groep G op V . Toon aan dat $\overline{U}$ met $\overline{U}(g) := \overline{U(g)}$ met $g \in G$ ook een unitaire representatie is van G op V .
3. Toon aan dat $\overline{U}$ irreducibel is als en slechts als U het is.
4. Bereken het karakter van $\overline{U}$ in termen van het karakter van U .
5. De cyclische groep C_3 wordt gegenereerd door een element g dat voldoet aan de enige relatie $g^3 = e$. Bepaal de irreps van C_3 en bereken de complex toegevoegde van elke irrep.

Vraag 2:

1. G is een eindige groep en U een unitaire representatie van G op $\mathbb{C}^d$ dat uitgerust is met zijn standaard scalair product. We gebruiken het standaard Hilbert-Schmidt scalair product op M_d : als A en B complexe matrices zijn dan is:

$$\langle A, B \rangle_{HS} := \text{Tr}(A^* B)$$

2. Stel dat V een unitaire matrix is in M_d , toon dan aan dat $Ad(V) : A \in M_d \rightarrow VAV^*$ een unitaire transformatie is van M_d .
3. Toon aan dat $g \in G \rightarrow Ad(U(g))$ een unitaire representatie is van G op M_d .
4. Bereken het karakter van de representatie uit het vorig puntje.