PROEFEXAMEN LINEAIRE ALGEBRA
dinsdag 22 november 2016

---

1. Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een eindigdimensionale vectorruimte en veronderstel dat U en W deelruimten van V zijn. Toon aan dat

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W).$$

2. Waar of fout? Argumenteer je antwoord.

   (a) Zij $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ met de eigenschap dat $AX \neq BX$ voor elke niet-nul vector $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dan is $A - B$ inverteerbaar.

   Oplossing: WAAR.

   Als $AX \neq BX$ voor elke niet-nul vector X, dan betekent dit dat het homogene stelsel $(A - B)X = 0$ een unieke oplossing heeft, namelijk $X = 0$. We hebben dan geleerd dat de matrix $A - B$ inverteerbaar is. (Stelling 1.39)

   Opmerkingen:

   - Velen dachten dat de bewering fout was en gaven een (uiteraard verkeerd) tegenvoorbeeld. Ze gaven dan een concrete matrix A, een concrete matrix B en een concrete vector X en controleerden dan dat $AX \neq BX$ en $A - B$ niet inverteerbaar. Het is niet voldoende om $AX \neq BX$ te controleren voor één specifieke vector X want de negatie van

     $$\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} : (\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : AX \neq BX) \Rightarrow (A - B \text{ inverteerbaar})$$

     is immers

     $$\exists A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} : (\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : AX \neq BX) \text{ en } (A - B \text{ niet inverteerbaar}).$$

     Om een tegenvoorbeeld te geven, moet je dus concrete matrices A en B geven zodat voor *elke* vector X geldt dat $AX \neq BX$. Het is niet voldoende om *één concrete* vector X te geven waarvoor $AX \neq BX$. Uiteraard bestaat zo'n tegenvoorbeeld niet, de bewering is immers wel waar.
   - Een aantal mensen schreven het volgende:
     "Omdat $AX \neq BX$ voor elke niet-nul vector X, geldt $A - B \neq 0$. En dus $\det(A - B) \neq 0$."
     Dit is heel fout! Het is niet omdat een matrix niet de nulmatrix is, dat zijn determinant verschillend is van 0! Denk bijvoorbeeld aan de matrix

     $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

     Deze matrix is niet de nulmatrix, maar heeft toch determinant gelijk aan 0.
   - Sommigen schreven ook "$\det((A - B)X)$", maar dit is nonsens. We weten dat $(A-B)X$ een vector is en de determinant van een vector bestaat niet, die bestaat enkel voor vierkante matrices.

- Nog een veel gemaakte fout: $\det(A-B) \neq \det(A) - \det(B)$!

(b) Zij V een vectorruimte en $D \subset V$ een deelverzameling. Er geldt

$$\mathrm{vct}(D) = \mathrm{vct}(\mathrm{vct}(D)).$$

Oplossing: WAAR.
METHODE 1: We weten dat $\mathrm{vct}(D)$ een deelruimte is van V. We hebben ook geleerd dat $\mathrm{vct}(\mathrm{vct}(D))$ de kleinste deelruimte van V is die $\mathrm{vct}(D)$ omvat. Deze kleinste deelruimte is uiteraard de deelruimte $\mathrm{vct}(D)$ zelf, dus $\mathrm{vct}(D) = \mathrm{vct}(\mathrm{vct}(D))$.
METHODE 2: De deelruimte $\mathrm{vct}(D)$ is de deelruimte van lineaire combinaties van vectoren in D. De deelruimte $\mathrm{vct}(\mathrm{vct}(D))$ is de deelruimte van lineaire combinaties van vectoren in $\mathrm{vct}(D)$. Om de gelijkheid van twee verzamelingen aan te tonen, moeten we twee inclusies bewijzen.
Neem $x \in \mathrm{vct}(D)$ willekeurig. Dan is $1 \cdot x$ een lineaire combinatie van vectoren in $\mathrm{vct}(D)$ en dus $x \in \mathrm{vct}(\mathrm{vct}(D))$. We hebben bewezen dat $\mathrm{vct}(D) \subseteq \mathrm{vct}(\mathrm{vct}(D))$.
Neem nu $x \in \mathrm{vct}(\mathrm{vct}(D))$, dan kunnen we x schrijven als

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \tag{1}$$

met $\lambda_i \in \mathbb{R}$ en $v_i \in \mathrm{vct}(D)$. Omdat elke $v_i \in \mathrm{vct}(D)$, is v_i een lineaire combinatie van vectoren in D. Dus x is een lineaire combinatie van lineaire combinaties van vectoren uit D en een lineaire combinatie van lineaire combinaties is opnieuw een lineaire combinatie. Inderdaad, voor elke $i \in \{1, \ldots, n\}$ bestaan er vectoren $w_j^{(i)} \in D$ en getallen $\mu_j^{(i)} \in \mathbb{R}$ zodat

$$v_i = \mu_1^{(i)} w_1^{(i)} + \mu_2^{(i)} w_2^{(i)} + \cdots + \mu_{m_i}^{(i)} w_{m_i}^{(i)} = \sum_{j=1}^{m_i} \mu_j^{(i)} w_j^{(i)}.$$

Door dit in te vullen in (1), vinden we

$$\begin{aligned}
x &= \lambda_1 \left(\mu_1^{(1)} w_1^{(1)} + \mu_2^{(1)} w_2^{(1)} + \cdots + \mu_{m_1}^{(1)} w_{m_1}^{(1)}\right) \\
&\quad + \lambda_2 \left(\mu_1^{(2)} w_1^{(2)} + \mu_2^{(2)} w_2^{(2)} + \cdots + \mu_{m_2}^{(2)} w_{m_2}^{(2)}\right) \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \lambda_n \left(\mu_1^{(n)} w_1^{(n)} + \mu_2^{(n)} w_2^{(n)} + \cdots + \mu_{m_n}^{(n)} w_{m_n}^{(n)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \sum_{j=1}^{m_i} \mu_j^{(i)} w_j^{(i)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} (\lambda_i \mu_j^{(i)}) w_j^{(i)}.
\end{aligned}$$

Omdat $\lambda_i \mu_j^{(i)} \in \mathbb{R}$ voor elke i en j, halen we hieruit dat x een lineaire combinatie is van de vectoren $w_j^{(i)} \in D$. Dit betekent dat $x \in \mathrm{vct}(D)$ en dus dat $\mathrm{vct}(D) \supseteq \mathrm{vct}(\mathrm{vct}(D))$.
Omdat we beide inclusies hebben aangetoond, hebben we bewezen dat

$$\mathrm{vct}(D) = \mathrm{vct}(\mathrm{vct}(D)).$$

Opmerkingen:

- Velen hebben enkel de moeilijke inclusie beargumenteerd: $\mathrm{vct}(D) \supseteq \mathrm{vct}(\mathrm{vct}(D))$. Dat is niet voldoende. Ook al is de andere inclusie gemakkelijk, je moet ze ook vermelden.
- Sommigen schreven iets zoals:
  "Neem β een basis van D."
  Dat kan niet! Er is niet gegeven dat D een (deel)vectorruimte is, en dus kan je geen basis van D nemen. Enkel vectorruimtes hebben een basis.
- Vaak veronderstelden mensen dat D eindig is door *"Noem $D = \{v_1, \ldots, v_n\}$"* te zeggen. Het is echter niet gegeven dat D eindig is en dus mag je daar niet van uit gaan.

(c) Als $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ twee scheefsymmetrische matrices zijn, dan is $A \cdot B$ symmetrisch.

Oplossing: FOUT.

We geven een voorbeeld van twee scheefsymmetrische matrix A en B waarvoor $A \cdot B$ niet symmetrisch is. Neem bijvoorbeeld

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{dan} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opmerkingen:

- Voor een scheefsymmetrische matrix geldt dat er op de diagonaal overal nullen moeten staan! Er zijn veel onjuiste tegenvoorbeelden gegeven van matrices A en B die geen nullen op de diagonaal hadden.
- Een veelgemaakte fout is het veranderen van de volgorde waarin matrices vermenigvuldigd worden. Dit mag in het algemeen niet! Let dus op de volgorde van de matrices wanneer je de volgende eigenschap toepast: $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.
- Veel mensen hebben afgeleid dat voor scheefsymmetrische matrices A en B geldt dat $(A \cdot B)^T = B \cdot A \neq A \cdot B$. Die laatste ongelijkheid geldt echter niet in het **algemeen**. Voor **sommige** matrices mogen we de volgorde van vermenigvuldiging niet omdraaien, maar voor **sommige** matrices mag dat wel. Er zijn namelijk ook voorbeelden te bedenken van scheefsymmetrische matrices A en B waarvoor $A \cdot B$ **wel** symmetrisch is. Je moet in dit geval dus echt een expliciet tegenvoorbeeld (met getallen in je matrix) geven.

(d) De verzameling

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \{(x, y, z), (1, 0, 1), (0, 1, 0)\} \text{ is een basis van } \mathbb{R}^3\right\} \cup \{0\}$$

is een deelruimte van $\mathbb{R}^3$.

Oplossing: FOUT.

We zullen laten zien dat W niet aan alle voorwaarden van het Deelruimtecriterium voldoet. Er zijn namelijk vectoren w_1 en w_2 in W te vinden waarvoor de som $w_1 + w_2 \notin W$.

Neem bijvoorbeeld $w_1 = (1, 0, 0)$ en $w_2 = (0, 0, 1)$. Om te controleren of $w_1 \in W$ (resp. $w_2 \in W$), moeten we nagaan of

$$\{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 0)\} \text{ (resp. } \{(0, 0, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0)\})$$

een basis is van $\mathbb{R}^3$. Er zijn verschillende manieren waarop we dit kunnen aanpakken. We weten bijvoorbeeld al dat $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Volgens Stelling 3.44 is het dan voldoende om aan te tonen dat de drie vectoren $\{(1,0,0),(1,0,1),(0,1,0)\}$ (resp. $\{(0,0,1),(1,0,1),(0,1,0)\}$) lineair onafhankelijk zijn. We gaan daarvoor op zoek naar alle mogelijke waarden van $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ waarvoor

$$\lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(1,0,1) + \lambda_3(0,1,0) = (0,0,0).$$

Als we kijken naar de derde coördinaat, dan zien we direct dat $\lambda_2 = 0$ en als we kijken naar de tweede coördinaat, dan volgt $\lambda_3 = 0$. Nu kan λ_1 ook alleen maar nul zijn, wat betekent dat $\{(1,0,0),(1,0,1),(0,1,0)\}$ vrij is en dus een basis van $\mathbb{R}^3$. De redenering voor $\{(0,0,1),(1,0,1),(0,1,0)\}$ is analoog.

Dus $w_1, w_2 \in W$ en $w_1 + w_2 = (1,0,1)$. Dit is duidelijk niet de nulvector en $\{(1,0,1),(1,0,1),(0,1,0)\}$ vormt ook geen basis van $\mathbb{R}^3$, want de vectoren in deze verzameling zijn lineair afhankelijk. Dus $w_1 + w_2 \notin W$. Hiermee is aangetoond dat W geen deelruimte is van $\mathbb{R}^3$.

Opmerkingen:

- Het is belangrijk om te beseffen hoe de elementen van W eruit zien: W bevat vectoren uit $\mathbb{R}^3$. Zulke vectoren noteren we als een drietal getallen (x,y,z). Niet alle vectoren uit $\mathbb{R}^3$ zitten in W. De nulvector zit er wel in en verder zit bijvoorbeeld $(2,4,-6) \in W$, want $\{(2,4,-6),(1,0,1),(0,1,0)\}$ is een basis van $\mathbb{R}^3$ (dit kun je met een berekening nagaan). Voorbeelden van vectoren uit $\mathbb{R}^3$ die daarentegen niet in W zitten, zijn $(1,0,1)$ en $(0,1,0)$.
  De elementen van W zijn dus geen verzamelingen en er staat ook nergens dat $\{(x,y,z),(1,0,1),(0,1,0)\}$ een basis is voor W.
- Let op notatie! Als je wilt beweren dat W niet leeg is, dan moet je **niet** schrijven $\{0\} \in W$. Schrijf in plaats daarvan $0 \in W$ of eventueel $\{0\} \subset W$.
- Geef uitleg! Als je alle mogelijke coëfficiënten λ_1, λ_2, λ_3 wilt bepalen waarvoor

  $$\lambda_1(2,4,-6) + \lambda_2(1,0,1) + \lambda_3(0,1,0) = (0,0,0),$$

  schrijf dan niet alleen een matrix met getalletjes op. Leg eerst uit wat je wilt doen, voordat je met matrices gaat rekenen.

3. (a) Zij $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ een gegeven matrix. Toon aan dat de verzameling

   $$W_A := \big\{B \in \mathbb{R}^3 \mid \text{het stelsel } AX = B \text{ is oplosbaar}\big\}$$

   een deelruimte is van $\mathbb{R}^3$.

   (b) Zij $a \in \mathbb{R}$. Neem nu

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & a+1 & a+4 \\ 2 & 4 & a+1 \end{pmatrix}.$$

   Bepaal voor deze matrix A de dimensie van W_A, in functie van de parameter $a \in \mathbb{R}$.

Opmerkingen:

- De verzameling W_A is de verzameling van vectoren B zodat het stelsel $A \cdot X = B$ oplosbaar is. De matrix A is hier een specifieke matrix, je kan deze dus niet vrij kiezen. Deze verzameling is **niet** de oplossingsverzameling van het stelsel.
- Een stelsel $A \cdot X = B$ met A een vierkante matrix heeft een **unieke** oplossing als en slechts als A inverteerbaar is. Indien A niet inverteerbaar is heeft het stelsel geen of oneindig veel oplossingen afhankelijk van de vector B. Oplosbaarheid van het stelsel is dus **niet** equivalent met inverteerbaarheid van de matrix A.

- Geef uitleg! Leg steeds uit wat je wil gaan berekenen wanneer je werkt met matrices en stelsels. Het is niet voldoende om de (uitgebreide) matrix van een stelsel op te schrijven en te rekenen. Dit geldt ook voor het bepalen van de dimensie. Schrijf niet enkel $\dim(W_A) = 1$ maar leg uit hoe je hieraan komt.

Oplossing:

(a) Wegens het deelruimtecriterium (Stelling 3.11) is het voldoende om aan te tonen dat

i. $W_A \neq \emptyset$,

ii. voor alle B_1 en $B_2 \in W_A$ geldt: $B_1 + B_2 \in W_A$,

iii. voor alle $B_3 \in W_A$ en voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt: $\lambda B_3 \in W_A$.

We tonen de drie voorwaarden aan.

i. De nulvector is steeds een element van de verzameling W_A want het homogene stelsel $A \cdot X = 0$ heeft altijd een oplossing er geldt immers dat $A \cdot (0,0,0)^T = (0,0,0)^T$.

ii. Zij B_1 en $B_2 \in W_A$. Dit betekent dat er X_1 en X_2 bestaan zodat $A \cdot X_1 = B_1$ en $A \cdot X_2 = B_2$. Dan geldt

$$B_1 + B_2 = A \cdot X_1 + A \cdot X_2 = A \cdot (X_1 + X_2).$$

In het bijzonder is het stelsel $A \cdot X = B_1 + B_2$ oplosbaar, inderdaad $X_1 + X_2$ is een oplossing. Dus $B_1 + B_2$ is een element van W_A.

iii. Zij $B_3 \in W_A$. Dit betekent dat er een X_3 bestaat zodat $A \cdot X_3 = B_3$. Nu geldt

$$\lambda B_3 = \lambda A \cdot X_3 = A \cdot (\lambda X_3).$$

In het bijzonder is het stelsel $A \cdot X = \lambda B_3$ oplosbaar, inderdaad λX_3 is een oplossing. Dus λB_3 is een element van W_A.

(b) We geven voor deze oefening twee oplosingsmethodes. Beide zijn correct, ook een combinatie van de twee methodes is correct.

- METHODE 1: Merk op dat de dimensie van deze ruimte niet verandert wanneer we elementaire rijoperaties toe passen op de matrix A. De deelruimte zelf verandert wel, maar de dimensie blijft gelijk. Inderdaad, zij E de matrixvoorstelling van een (elementaire) rijoperatie, dan is

$$B \in W_A \text{ als en slechts als } E \cdot B \in W_{E \cdot A}.$$

Indien er een X bestaat zodat $A \cdot X = B$, dan geldt ook $(E \cdot A) \cdot X = E \cdot B$ en omgekeerd. We herleiden de matrix A tot bovendriehoeksvorm met behulp van elementaire rijoperaties.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & a+1 & a+4 \\ 2 & 4 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 - 2R_1]{R_2 \mapsto R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a-5 & a-5 \\ 0 & 0 & a-5 \end{pmatrix}.$$

We moeten nu de dimensie bepalen van de deelruimte $W_{E \cdot A}$. We onderscheiden twee gevallen:

  - $a = 5$: Het stelsel $EA \cdot X = E \cdot B$ is dan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = E \cdot B$$

Dit stelsel heeft enkel oplossingen indien $E \cdot B = (b, 0, 0)^T$ met $b \in \mathbb{R}$. De dimensie van $W_{E \cdot A}$ (en dus van W_A) is 1.
Merk op dat $\{(1, 0, 0)^T\}$ een basis is van de deelruimte $W_{E \cdot A}$ maar niet van W_A. Een basis van W_A wordt gegeven door $E^{-1} \cdot (1, 0, 0)^T = (1, 3, 2)^T$.

- $a \neq 5$: Dan is de matrix A inverteerbaar en dus heeft het stelsel $A \cdot X = B$ een (unieke) oplossing voor elke vector B. De ruimte W_A is dus de hele ruimte $\mathbb{R}^3$. Deze heeft dimensie 3.

- METHODE 2:
Zij $B = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$ we gaan na wanneer het stelsel $A \cdot X = B$ een oplossing heeft door de uitgebride matrix tot bovendriehoeksvorm te brengen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 3 & a+1 & a+4 & b_2 \\ 2 & 4 & a+1 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 - 2R_1]{R_2 \mapsto R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & a-5 & a-5 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & a-5 & b_3 - 2b_1 \end{pmatrix}.$$

We onderscheiden opnieuw twee gevallen:

- $a = 5$: We bekomen na rijherleiden van de uitgebreide matrix tot

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_1 \end{pmatrix}.$$

Dit stelsel is oplosbaar als en slechts als $b_2 - 3b_1 = 0$ en $b_3 - 2b_1 = 0$ (zie Stelling 1.11). De verzameling W_A is dus

$$W_A = \left\{ (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; b_2 - 3b_1 = 0 \text{ en } b_2 - 3b_1 = 0 \right\}.$$

Een basis voor W_A wordt dus gegeven door $(1, 3, 2)^T$ en W_A heeft dimensie 1.

- $a \neq 5$: De echelonvorm van de uitgebreide matrix is dan van de vorm

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & * \\ 0 & 1 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}.$$

Een stelsel dat in deze vorm kan gebracht worden met behulp van elementaire rijoperaties heeft steeds een (unieke) oplossing. Dit is opnieuw Stelling 1.11. De deelruimte W_A is dus gelijk aan $\mathbb{R}^3$ en heeft dimensie 3.