

Calculus I - Evaluatie 1 - 18/11/2019

1 Meerkeuzevragen

1a Beschouw het complex getal $z = 1 + i$. Wat is $\operatorname{Re}(z^4)$?

Als $z = 1 + i$, dan is $z^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$. Hieruit volgt dat $z^4 = (z^2)^2 = (2i)^2 = -4$. Dit is een reëel getal en dus is $\operatorname{Re}(z^4) = -4$.

1b Hoeveel zuiver imaginaire nulpunten heeft volgende veelterm?

$$p(x) = x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 4\sqrt{3}$$

Een zuiver imaginair nulpunt is van de vorm ai waarbij $a \in \mathbb{R}$. We vinden dat $p(ai) = 0$ als en slechts als $-a^3i + \sqrt{3}a^2 + 4ai - 4\sqrt{3} = 0$. Een complex getal is nul enkel indien zowel het reële als het imaginaire deel nul is. In dit geval vinden we het stelsel

$$\begin{cases} -a^3 + 4a = 0, \\ \sqrt{3}a^2 - 4\sqrt{3} = 0. \end{cases}$$

Dit stelsel heeft als oplossingen $a = 2$ en $a = -2$, er zijn dus 2 zuiver imaginaire nulpunten.

1c Welk van volgende uitspraken omtrent asymptoten is juist voor de functie f ?

$$f(x) = \frac{x}{|x-1|} + e^x.$$

Voor de functie geldt dat

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

en dus heeft de functie een horizontale asymptoot als $x \rightarrow -\infty$. We vinden ook dat

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

en dus is er een verticale asymptoot $x = 1$. Er zijn geen andere asymptoten.

1d Wat is de waarde voor volgende limiet?

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^{\ln(x)}$$

We herschrijven de functie als $x^{\ln(x)} = e^{\ln(x) \cdot \ln(x)}$. Omdat

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(x) = -\infty$$

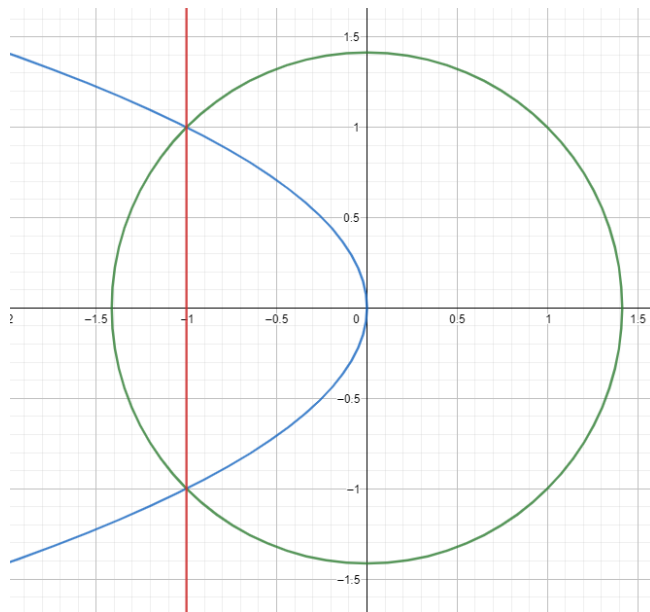
vinden we dat

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^{\ln(x)} = +\infty.$$

1e Welk van volgende integralen bepaalt de oppervlakte van het gebied ingesloten door de cirkel $x^2 + y^2 = 2$ en de parabool $y^2 = -x$?

De parabool en de cirkel snijden elkaar in de punten $(-1, 1)$ en $(-1, -1)$, zie ook Figuur 1. Om de ingesloten oppervlakte te bepalen moeten we deze opdelen in 2 delen: voor $x < -1$ moeten we de oppervlakte bepalen die ingesloten wordt door $x = 1$ en de cirkel, voor $x > -1$ moeten we de oppervlakte bepalen die ingesloten wordt door de parabool en $x = -1$. Door gebruik te maken van de symmetrie tov de x -as vinden we dat de totaal ingesloten oppervlakte gegeven wordt door

$$2 \int_{-\sqrt{2}}^{-1} \sqrt{2-x^2} dx + 2 \int_{-1}^0 \sqrt{-x} dx.$$



Figuur 1: Plot van de parabool, de cirkel en de rechte $x = -1$.

2 Functie

Beschouw de functie $f(x) = x + \ln(x)$.

2a Bepaal het domein van de functie f . Motiveer je antwoord.

De functie $\ln(x)$ is enkel gedefinieerd voor positieve reële waarden, daarom is het domein van f gelijk aan $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

2b Bepaal het beeld van de functie f . Motiveer je antwoord.

We vinden dat

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ en } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Wegens de continuïteit van de functie volgt dat het beeld van f gelijk is aan $\mathbb{R}$.

2c Beargumenteer dat de inverse functie van f bestaat. Noem deze functie ω en geef het domein en beeld van ω .

De afgeleide wordt gegeven door $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ zodat $f'(x) > 0$ voor alle $x > 0$. De functie f is dus strikt stijgend en bijgevolg inverteerbaar. We noemen deze inverse functie ω en het domein van ω is per definitie het beeld van f , en ook is het beeld van ω gelijk aan het domein van f , dus $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$.

2d Bepaal $\omega'(e+1)$. Geef je berekeningen weer.

We vinden dat $f(e) = e + 1$ en dus

$$\omega'(e+1) = \frac{1}{f'(e)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e}} = \frac{e}{e+1}.$$

3 Optimalisatieprobleem

Beschouw het trapezium $ABCD$ welke bestaat uit 3 gelijkzijdige driehoeken met zijden van lengte 1. Het punt Z verdeelt het lijnstuk BC in twee gelijke delen. Het punt Y verdeelt het lijnstuk AD in twee gelijke delen. Zij X een willekeurig punt op het lijnstuk YZ .

- 3a** Bepaal het punt X op het lijnstuk YZ zodat $|XA| + |XB| + |XC| + |XD|$ minimaal is. Wat is deze minimale waarde? Motiveer je antwoord.

Noteer met h de afstand tussen X en het gegeven punt Y . Met de stelling van Pythagoras vinden we dat $0 \leq h \leq \sqrt{3}/2$. Als $h = 0$ dan is $X = Y$, als $h = \sqrt{3}/2$, dan is $X = Z$. Merk op dat de afstand van Z tot X gegeven wordt door $\sqrt{3}/2 - h$. Opnieuw gebruik makend van de stelling Pythagoras vinden we vervolgens dat $|XA| + |XB| + |XC| + |XD|$, in functie van h , gegeven wordt door

$$d(h) = 2\sqrt{h^2 + 1} + 2\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - h\right)^2} = 2\sqrt{h^2 + 1} + 2\sqrt{1 - \sqrt{3}h + h^2}$$

waarbij we gebruik maken dat $|XA| = |XD|$ en $|BX| = |CX|$. De afgeleide wordt gegeven door

$$d'(h) = \frac{2h}{\sqrt{h^2 + 1}} + \frac{2h - \sqrt{3}}{\sqrt{1 - \sqrt{3}h + h^2}}.$$

We lossen vervolgens de vergelijking $d'(h) = 0$ op, waarbij we rekening houden met het gegeven dat $0 \leq h \leq \sqrt{3}/2$. We vinden dat

$$2h \left(\sqrt{1 - \sqrt{3}h + h^2} \right) = \sqrt{h^2 + 1} (\sqrt{3} - 2h)$$

en kwadrateren vervolgens beide leden, dit mag omdat alle 4 factoren positief zijn wegens $0 \leq h \leq \sqrt{3}/2$. We vinden

$$4h^2(1 - \sqrt{3}h + h^2) = (h^2 + 1)(\sqrt{3} - 2h)^2.$$

Indien we deze vergelijking uitwerken vinden we dat

$$3h^2 - 4\sqrt{3}h + 3 = 0.$$

Deze heeft 2 oplossingen, $h = \sqrt{3}/3$ en $h = \sqrt{3}$, maar enkel de eerste voldoet aan de voorwaarde dat $0 \leq h \leq \sqrt{3}/2$. We maken een tekentabel om het verloop van d te bepalen.

h	0	...	$\sqrt{3}/3$	...	$\sqrt{3}/2$
d'	-	-	0	+	+
d		$\searrow$	min	$\nearrow$	

We vinden dus dat d een lokaal minimum heeft wanneer $h = \sqrt{3}/3$. Omdat binnen het interval $[0, \sqrt{3}/2]$ dit het enige lokale extrema is, moet dit wel het globale minimum zijn. We vinden $d(\sqrt{3}/3) = 2\sqrt{3}$.

- 3b** Voor welk punt X op het lijnstuk YZ is $|XA| + |XB| + |XC| + |XD|$ maximaal? Wat is deze maximale waarde en waar bevindt zich dit punt X ? Motiveer je antwoord.

Omdat er geen lokale maxima zijn, kan het globale maximum zich enkel op de randpunten bevinden. Wanneer $X = Y$ vinden we dat $d(0) = 4$. Als $X = Z$ vinden we na een korte berekening dat $d(\sqrt{3}/2) = 1 + \sqrt{7}$. Omdat $1 + \sqrt{7} < 1 + \sqrt{9} = 4$ vinden we dat de maximale waarde wordt bereikt wanneer $X = Y$. Deze maximale waarde is 4.

4 Integraal en differentiaalvergelijking

- 4a** Toon aan dat volgende integraal convergent is en geef een expliciete uitdrukking voor de integraal. Geef je berekeningen weer en beargumenteer iedere stap.

$$\int_{-1}^0 x^2 \ln(x^3 + 1) dx$$

De onbepaalde integraal wordt gegeven door

$$I = \int x^2 \ln(x^3 + 1) dx$$

zodat de substitutie $x^3 + 1 = u$ geeft dat

$$I = \frac{1}{3} \int \ln(u) du.$$

Door middel van partiële integratie (ofwel door gebruik te maken van het formularium) vinden we dat

$$I = \frac{1}{3} (u \ln(u) - u) + C = \frac{1}{3} ((x^3 + 1) \ln(x^3 + 1) - (x^3 + 1)) + C$$

met $C \in \mathbb{R}$. De bepaalde integraal is dus

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 x^2 \ln(x^3 + 1) dx &= \frac{1}{3} \left(\ln(1) - 1 - \lim_{t \rightarrow -1} ((t^3 + 1) \ln(t^3 + 1) - (t^3 + 1)) + 0 \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(-1 - \lim_{t \rightarrow -1} ((t^3 + 1) \ln(t^3 + 1)) \right) \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

omdat

$$\lim_{t \rightarrow -1} (t^3 + 1) \ln(t^3 + 1) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{\ln(t^3 + 1)}{\frac{1}{t^3 + 1}} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{\frac{3t^2}{t^3 + 1}}{-\frac{3t^2}{(t^3 + 1)^2}} = \lim_{t \rightarrow -1} -(t^3 + 1) = 0$$

waarbij we gebruik maakten van de regel van l'Hopital. De integraal convergeert dus naar $-1/3$.

- 4b** Bepaal alle functies y die voldoen aan de differentiaalvergelijking

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

met randvoorwaarde $y'(0) = 1$. Geef je berekeningen weer.

De karakteristieke vergelijking wordt gegeven door $r^2 + 4r + 4 = 0$. Deze heeft enkel $r = -2$ als oplossing. De algemene oplossing voor de differentiaalvergelijking is dus van de vorm

$$y(t) = Ae^{-2t} + Bte^{-2t}$$

waarbij $A, B \in \mathbb{R}$. We bepalen vervolgens de functies die ook aan de randvoorwaarde voldoen. We vinden dat $y'(0) = 1$ als $-2A + B = 1$. We concluderen dat de functies die aan de differentiaalvergelijking voldoen, alsook aan de randvoorwaarde worden gegeven door

$$y(t) = Ae^{-2t} + (2A + 1)te^{-2t} = e^{-2t} (A + (2A + 1)t)$$

waarbij $A \in \mathbb{R}$.