

Naam:

q-nummer:

Score:

Examen Thermodynamica, 24 Juni 2022

Opmerkingen:

- Het examen bestaat uit twee delen (Fysische thermodynamica en Thermodynamica: Statistische achtergrond). De studenten die alleen Fysische thermodynamica doen maken alleen het eerste gedeelte.
- Kijk voor je begint kort de vragen door. Sommige zijn gemakkelijker en doe je misschien liever eerst.
- Maak goed gebruik van het formularium.
- Altijd geldende tip: let goed op de eenheden!
- De test is schriftelijk en je wilt graag dat het goed verbeterd wordt. Maak je ruwste schetsen dus eerst op (ander) kladpapier. Zet je naam op elk blad.

• Vergelijkingen en constanten

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \quad (0.1)$$

$$\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots \quad (0.2)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (0.3)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (0.4)$$

$$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{15} + \dots \quad (0.5)$$

$$\log N! = N \log N - N \quad (0.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha p^2/2} dp = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \quad (0.7)$$

$$\frac{d}{d\alpha} I_{\alpha} = \frac{-1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 e^{-\alpha x^2/2} \quad (0.8)$$

Fysische thermodynamica

1 Verwarmen van een huis

Een huis is opgebouwd uit buitenmuren die bestaan uit een laag bakstenen en een laag isolatie. De twee lagen hebben elk een dikte van 10 cm waarbij de bakstenen gericht zijn naar buiten, zie figuur 1. De verwarming zorgt ervoor dat de temperatuur binnen op 20°C wordt gehouden terwijl het buiten 0°C is. Verder is gegeven dat het systeem stationair is met $k_1 = 0.040 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ en $k_2 = 0.50 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$.

a) Wat is de temperatuur op de plek waar de bakstenen en de isolatie elkaar raken?

Het verwarmen van het huis gebeurt met een warmtepomp. De pomp verbruikt elektrische stroom om warmte te onttrekken van buiten om zo de binnenruimte te verwarmen. De 'coefficient of performance' (COP) bepaalt hoe efficiënt een warmtepomp kan verwarmen t.o.v. zijn verbruik. Anders gezegd, de COP is de verhouding van de nuttige warmte t.o.v. de netto arbeid.

b) Bepaal de efficiëntie (dus de COP) van de warmtepomp van het huis bij de gegeven temperaturen en bereken deze vervolgens. Ga er hierbij voor het gemak van uit dat de pomp een ideale carnotcyclus volgt in de omgekeerde richting en gebruikt maakt van een ideaal gas.

c) Vergelijk het antwoord uit b) met de meest efficiënte elektrische verwarming die stroom direct omzet in warmte in plaats van stroom gebruiken om warmte te transporteren.

d) Neem nu dat het buiten een stuk warmer is en de airconditioning zijn werk moet doen. De airco kan maximaal een warmteflux van 10 W per vierkante meter muur onttrekken uit hetzelfde huis als de vorige deelvragen. Wat is de maximale buitentemperatuur waarbij de binnentemperatuur van 20°C behouden kan worden?

1.1 Oplossing

a, 2 pnt) Aangezien de toestand stationair is, moet de warmtestroom die langs de isolatie komt gelijk zijn aan de warmte die ontsnapt via de bakstenen. Met de wet van Fourier:

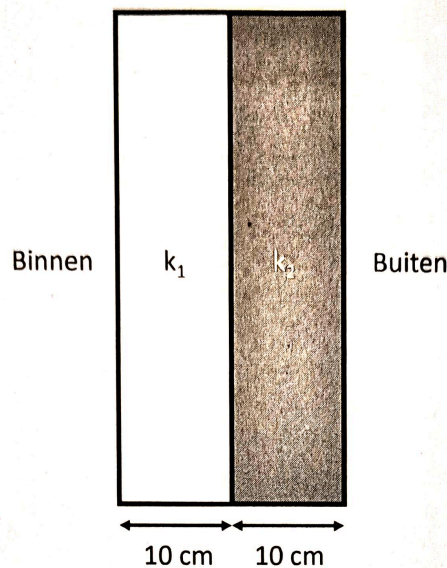
$$\frac{J_{\text{isolatie}}}{A} = \frac{k_1(T - T_1)}{L} = \frac{k_2(T_2 - T)}{L} = \frac{J_{\text{baksteen}}}{A} \quad (1.1)$$

Omvormen naar T geeft:

$$T = \frac{k_1 T_1 + k_2 T_2}{k_1 + k_2} = 274.62 \text{ K} = 1.48^\circ\text{C} \quad (1.2)$$

b, 1 pnt)

$$COP = \frac{|Q_h|}{W} = \frac{|Q_h|}{|Q_h| - |Q_c|} = \frac{1}{1 - |Q_c|/|Q_h|} = \frac{T_h}{T_h - T_c} \quad (1.3)$$



Figuur 1: Muur bestaande uit een isolatielaag (links) en een baksteenlaag (rechts).

$$COP = \frac{T_h}{T_h - T_c} = \frac{293.15 \text{ K}}{293.15 \text{ K} - 273.15 \text{ K}} = 14.66 \quad (1.4)$$

c, 1 pnt) Aangezien de efficiëntie van de warmtepomp groter is dan 1 kan het meer dan 1 W warmte verplaatsen per watt aan stroom. Dit maakt het efficiënter dan een elektrische verwarming.

d, 2 pnt) Gebruikmakend van de formule voor weerstanden in serie:

$$\frac{J}{A} = \frac{T_2 - T_1}{\frac{L}{k_1} + \frac{L}{k_2}} \quad (1.5)$$

Omvormen naar T_2

$$T_2 = T_1 + \frac{J}{A} \left(\frac{L}{k_1} + \frac{L}{k_2} \right) = 320.15 \text{ K} = 47^\circ\text{C} \quad (1.6)$$

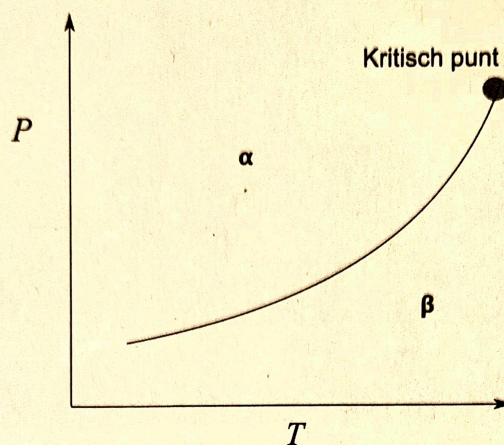
Met $J/A = 10 \text{ W/m}^2$

2 Clausius-Clapeyron

De curve in Fig. 2 geeft de dampspanningslijn tussen fase α en β .

a) Als we een gas-vloeistof overgang beschouwen, welke fase is dan het gas en welke de vloeistof? Beargumenteer je antwoord.

b) Regenbuien kunnen ontstaan als warme lucht stijgt naar koude luchtlagen. Verklaar aan de hand van de Clausius-Clapeyron relatie, die de co-existentie beschrijft tussen de gas en vloeistof fase, waarom buien die ontstaan nadat het overdag 40°C was veel heftiger zijn dan regenbuien die ontstaan nadat het 20°C was.



Figuur 2: Dampspanningsrelatie van Clausius-Clapeyron

c) Toon aan dat de richtingscoëfficiënt van deze curve gegeven wordt door

$$\left. \frac{dP}{dT} \right|_{\text{coex.}} = \frac{\Delta S}{\Delta V}. \quad (2.1)$$

d) De bovenstaande relatie kan makkelijk opgelost worden op de basis van drie aannames. Legt uit wat deze aannames zijn en los de vergelijking op.

2.1 Oplossing

a, 1 pnt) De druk in een vloeistof is groter dan in een gas volgens de van der Waals loop.

b, 2 pnt) Richting het kritische punt verdwijnt het verschil tussen gas en vloeistof wat ook betekent dat het volume per deeltje kleiner wordt in het gas en dus dat er veel meer water in de lucht zit bij hogere temperaturen. Dat condenseert allemaal en komt met bakken uit de lucht.

c, 2 pnt) Uit $H^\beta - H^\alpha = T_o(S^\beta - S^\alpha)$ volgt

$$dG^\alpha = -S^\alpha dT + V^\alpha dP = -S^\beta dT + V^\beta dP = dG^\beta$$

en dus het te bewijzen.

d, 2 pnt) ΔV wordt gegeven puur door het volume van het gas waarvoor geschreven kan worden $\Delta V = V^g = \frac{RT}{P}$ voor een ideaal gas. Bovendien kan je aannemen dat de latente warmte niet T-afhankelijk is zodat $\Delta S = L/T$. Zo krijg je

$$\left. \frac{dP}{dT} \right|_{\text{coex}} = \frac{LP}{RT^2}$$

en dus $P = P_o \exp -\frac{L}{R}(1/T - 1/T_o)$.

3 Pulserende straalmotor

De eerste primitieve straalmotoren waren zogenaamde pulserende straalmotoren, waarbij herhaaldelijk een bepaalde hoeveelheid brandstof tot ontbranding wordt gebracht in de motor, dat explodeerde en zo voor stuwkracht zorgde. De thermodynamische cyclus geassocieerd aan deze motor heet de *Lenoir* cyclus en bestaat uit de volgende drie stappen

- 1 → 2 Ontbranding van de brandstof: een isochore toevoeging van warmte
- 2 → 3 Uitstoten van de hete gassen: een isentropische expansie
- 2 → 3 Afkoelen van de gassen bij atmosferische druk: een isobare afvoer van warmte

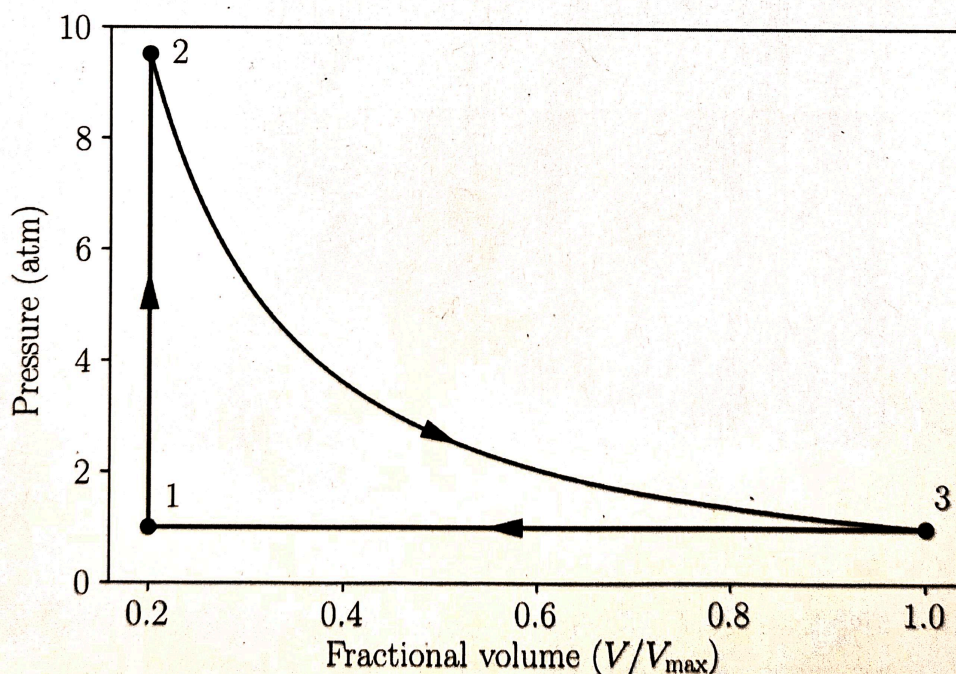
a) Schets het $P - V$ diagram.

b) Beschouw een straalmotor met als werkvloeistof 5 mol lucht, dat je mag aannemen zich zal gedragen als een ideaal diatomair gas. Gegeven dat $T_1 = 30^\circ\text{C}$ en $T_2 = 1200^\circ\text{C}$, bepaal T_3 .

c) Aangenomen dat de motor 35 keer per seconde "pulst" (elke puls is een volledige cyclus), wat is dan het geleverde vermogen aan nuttige arbeid? En wat is de efficiëntie? Vergelijk met de efficiëntie van een Carnot motor met warmtebaden van T_1 en T_2 . *Hint: Maak gebruik van de eerste hoofdwet, en reken eerst de warmtestromen uit.*

3.1 Oplossing

a, 2 pnt)



b, 2 pnt) Volgens de ideale gaswet geldt er dat

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

Verder, omdat $2 \rightarrow 3$ een adiabatisch proces is en $3 \rightarrow 1$ isobaar, geldt er dat

$$\frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Dus is

$$T_3 = T_2 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 937 \text{ K}$$

c, 3 pnt) $W + Q = \Delta U$, maar over een hele cyclus is ΔU natuurlijk 0, dus is $W = -Q$. Omdat $1 \rightarrow 2$ isochoor is en $3 \rightarrow 1$ isobaar, geldt er dat $Q_{12} = nC_v(T_2 - T_1)$ en $Q_{31} = nC_p(T_1 - T_3)$. Q_{23} is 0 want dat proces is adiabatisch. Dus

$$W = nC_v(T_2 - T_1) + nC_p(T_1 - T_3) = 29.7 \times 10^3 \text{ J}.$$

Vermenigvuldigen met de frekwentie geeft dan het vermogen $P = fW = 1.02 \text{ MW}$. De efficiëntie is $\eta = W/Q_{12}$ en dus een erbarmelijke

$$\eta = 1 + \gamma \frac{T_1 - T_3}{T_2 - T_1} = 0.241.$$

De Carnot efficiëntie is $1 - \frac{T_1}{T_2} = 0.792$

Verder, omdat $2 \rightarrow 3$ een adiabatisch proces is en $3 \rightarrow 1$ isobaar, geldt er dat

$$\frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Dus is

$$T_3 = T_2 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 937 \text{ K}$$

c, 3 pnt) $W + Q = \Delta U$, maar over een hele cyclus is ΔU natuurlijk 0, dus is $W = -Q$. Omdat $1 \rightarrow 2$ isochoor is en $3 \rightarrow 1$ isobaar, geldt er dat $Q_{12} = nC_v(T_2 - T_1)$ en $Q_{31} = nC_p(T_1 - T_3)$. Q_{23} is 0 want dat proces is adiabatisch. Dus

$$W = nC_v(T_2 - T_1) + nC_p(T_1 - T_3) = 29.7 \times 10^3 \text{ J}.$$

Vermenigvuldigen met de frekwentie geeft dan het vermogen $P = fW = 1.02 \text{ MW}$. De efficiëntie is $\eta = W/Q_{12}$ en dus een erbarmelijke

$$\eta = 1 + \gamma \frac{T_1 - T_3}{T_2 - T_1} = 0.241.$$

De Carnot efficiëntie is $1 - \frac{T_1}{T_2} = 0.792$

5 Deeltje in een “square well” potentiaal

We beschouwen een deeltje dat beweegt in de put van een één-dimensionale zogenaamde oneindige “square well” potentiaal met breedte L . De energie van zo een deeltje wordt gegeven door:

$$E(n) = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2}, \quad \text{voor } n = 1, 2, 3, \dots$$

waarbij $\hbar$, m , en L constanten zijn. Het systeem is in contact met een warmtebad.

a) Met welk ensemble hebben we hier te maken? Motiveer je antwoord.

b) Beschouw de situatie waarbij $k_B T \ll \theta$, waarbij $\theta = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$. Geef een uitdrukking voor de gemiddelde energie $\langle E \rangle$ en de warmtecapaciteit C_V .

Tip: Bij lage temperaturen dragen enkel de lage energie niveaus significant bij. Beschouw dus $n = 1, 2$.

c) Beschouw nu de situatie waarbij $k_B T \gg \theta$. Geef een uitdrukking voor de gemiddelde energie $\langle E \rangle$ en de warmtecapaciteit C_V ?

Tip: Probeer de discrete som niet analytisch uit te werken, dat zal je niet lukken. Bij hoge temperaturen zullen de verschillen tussen de energienivo's zo klein worden in vergelijking met de karakteristieke energieschaal van het deeltje, dat je kan aannemen dat het energie-spectrum continu wordt.

Oplossing: deeltje in een “square well”.

a, 1 pnt) Canonisch ensemble. Het systeem is in contact met een warmtebad. Er is dus uitwisseling van energie.

b, 2 pnt) De algemene vorm van de partitie-functie wordt in dit systeem gegeven door:

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \frac{1}{k_B T}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \theta \beta}, \quad (5.1)$$

waarbij we alle constanten in de factor $\theta = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$ nemen om het rekenwerk te vereenvoudigen, en $\beta = 1/k_B T$. Volgens de tip, beschouwen we bij lage temperaturen enkel de termen $n = 1, 2$:

$$Z = e^{-\theta \beta} + e^{-4\theta \beta}. \quad (5.2)$$

Hieruit kunnen we alvast de gemiddelde energie halen;

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \frac{\theta(e^{-\theta \beta} + 4e^{-4\theta \beta})}{e^{-\theta \beta} + e^{-4\theta \beta}} = \frac{\theta(e^{3\theta \beta} + 4)}{e^{3\theta \beta} + 1}. \quad (5.3)$$

Voor de warmtecapaciteit gebruiken we $C_V = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T}$ of,

$$C_V = -\frac{1}{k_B T^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \right) = -\frac{1}{k_B T^2} \left[\frac{3\theta^2 e^{3\theta \beta}}{e^{3\theta \beta} + 1} + \frac{\theta(e^{3\theta \beta} + 4)(3\theta e^{3\theta \beta} + 1)}{(e^{3\theta \beta} + 1)^2} \right] \quad (5.4)$$

c, 2 pnt) Bij hoge temperaturen zal $\beta \rightarrow 0$ oftewel de hoogste n (dus hoogste energie-niveaus) zullen het meeste bijdragen aan de partitie-functie (Kasper: Dit is niet juist, de lage n blijven de dominante factor in $\exp(-\beta\theta n^2)$). Deze energie-niveaus liggen dicht bij elkaar dus we kunnen bij benadering de som omzetten in een integraal,

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\theta\beta} = \int_0^{\infty} e^{-n^2\theta\beta} dn. \quad (5.5)$$

De verandering van $n = 1$ naar $n = 0$ mag ook bij benadering aangezien de lage n niveaus weinig bijdragen aan de partitie-functie (**Kasper**: merk wel op dat het verschil hier niet naar nul gaat als β naar nul gaat, maar naar één (1). Het is dus niet uitgesloten dat sommige gaan uitkomen dat $Z = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\theta\beta}}$. Dit geeft ook verschillende oplossingen voor de andere grootheden, met correcties van orde β). Aan de hand van Gaussische integralen kunnen we deze oplossen als,

$$Z = \int_0^{\infty} e^{-n^2\theta\beta} dn = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\theta\beta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{2mL^2\pi}{\hbar^2\pi^2\beta}\right)^{1/2} = \beta^{-1/2}\left(\frac{mL^2}{2\hbar^2\pi}\right)^{1/2}. \quad (5.6)$$

Hieruit halen we aan de hand van de vertrouwelijke afgeleiden, de gemiddelde energie en de warmtecapaciteit,

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z = \frac{1}{2}k_B T \quad (5.7)$$

$$C_V = -\frac{1}{k_B T^2} \frac{\partial}{\partial\beta} \left(-\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z \right) = \frac{1}{2}k_B. \quad (5.8)$$

Zoals verwacht is dit wat we vinden voor een 1-dimensionaal ideaal gas.