Modeloplossingen proefexamen lineaire algebra

Informatica

Vraag 1

Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een eindigdimensionale reële vectorruimte. Bewijs nauwkeurig en volledig dat elke vrije verzameling van vectoren in V uitgebreid kan worden tot een basis van V.

Oplossing. Zie boek p. 111 (Stelling 3.40 (1)). In het bewijs in het boek ontbreekt nog een redenering waarom de verzameling $\{v_1, ..., v_{k+1}\}$ vrij is. Dit kan men inzien als volgt.

Stel uit het ongerijmde dat $\{v_1, ..., v_{k+1}\}$ geen vrije verzameling is, dan bestaan er per definitie reële getallen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ zodat

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0.$$

Merk op dat $\lambda_{k+1} \neq 0$, anders zou $D = \{v_1, ..., v_k\}$ niet vrij zijn, in tegenstelling tot de aanname. Dus we vinden dat

$$v_{k+1} = (-\lambda_1/\lambda_{k+1})v_1 + (-\lambda_2/\lambda_{k+1})v_2 + \cdots + (-\lambda_k/\lambda_{k+1})v_k.$$

Echter, dit impliceert dat v_{k+1} een lineaire combinatie is van vectoren uit D, wat opnieuw niet kan volgens de aannames. Dus we krijgen een contradictie en het gevraagde volgt.

Vraag 2

Waar of fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(a) Als A en B vierkante $n \times n$ matrices zijn en als $AB = I_n$, dan is $BA = I_n$.

(b) Als A en B vierkante $n \times n$ matrices en als $\det(A + B) = \det(B)$, dan is $\det(A) = 0$.

(c) Als v_1, v_2, v_3, v_4 vectoren in een vectorruimte zijn met $v_1 \in \text{vct}\{v_2, v_3, v_4\}$ en $v_1 \notin \text{vct}\{v_3, v_4\}$, dan is $v_2 \in \text{vct}\{v_1, v_3, v_4\}$.

Oplossing.

(a) Waar.

De vierkante matrix B heeft een linkse inverse A. Daarom kunnen we stelling 1.39 toepassen om te zien dat A ook een rechtse inverse van B is.

(b) Onwaar.

Voor een tegenvoorbeeld kunnen we bijvoorbeeld $A = I_2$ en $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nemen. Voor deze keuze van A en B geldt immers $\det(A + B) = \det(B) = 0$ en $\det(A) = 1 \neq 0$.

(c) Waar.

Omdat $v_1 \in \operatorname{vct}\{v_2, v_3, v_4\}$ bestaan er reële getallen a_2, a_3, a_4 zodat $v_1 = a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4$. Merk nu op dat $a_2 \neq 0$. Immers, indien $a_2 = 0$ zien we dat $v_1 = a_3v_3 + a_4v_4$ maar dit conflicteert met de aanname dat $v_1 \notin \operatorname{vct}\{v_3, v_4\}$. Omdat $a_2 \neq 0$ kunnen we delen door a_2, dus is

$$v_2 = (1/a_2)v_1 + (-a_3/a_2)v_3 + (-a_4/a_2)v_4 \in \operatorname{vct}\{v_1, v_3, v_4\},$$

zoals gevraagd.

Vraag 3

Zij $a, b \in \mathbb{R}$ en beschouw de vectoren $v_1 = (a, 1, 0)$, $v_2 = (a, 1 + 2a, ab)$ en $v_3 = (-a, 1, a)$ in $\mathbb{R}^3$. Definieer de vectorruimte $V = \operatorname{vct}\{v_1, v_2, v_3\}$. Bepaal de dimensie van V in functie van de parameters a en b.

Oplossing. Bekijk de matrix A die als rijen de vectoren v_1, v_2, v_3 heeft.

Merk op dat $\dim(V) = \dim(R(A)) = 3 - \dim(N(A))$ (stelling 3.64). We gaan dus eerst bepalen wat $\dim(N(A))$ is, dit doen we door het aantal vrije variabelen in het homogeen stelsel $AX = 0$ te bepalen.

Het toepassen van 2 elementaire rijoperaties levert

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a & 1+2a & ab \\ -a & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 2a & ab \\ -a & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 2a & ab \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Als $a = 0$ zien we dat het geassocieerd homogeen stelsel twee vrije variabelen heeft, en dus $\dim(N(A)) = 2$.

Stel nu dat $a \neq 0$. Dan kunnen we verder rijreduceren als volgt:

$$\xrightarrow{R_2 \to a^{-1}R_2} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}.$$

Als $a \neq 0$ en $a = b$ is er 1 vrije variabele, waaruit volgt $\dim(N(A)) = 1$. Tenslotte als $a \neq b, a \neq 0$ dan zijn er geen vrije variabelen en is $\dim(N(A)) = 0$.

De conclusie is dus dat

$$\dim(V) = \begin{cases} 1 & a = 0 \\ 2 & a \neq 0, a = b \\ 3 & a \neq 0, a \neq b \end{cases}.$$

Wiskunde & fysica

Vraag 1

Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte en $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ een deelverzameling van m vectoren uit V. Bewijs het lemma van Steinitz: als A voortbrengend is voor V, dan is een willekeurige deelverzameling van V met meer dan m elementen lineair afhankelijk.

Oplossing. Zie het boek p. 108, (Stelling 3.35).

Vraag 2

Waar of fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(a) Als A en B vierkante $n \times n$ matrices zijn en AB is inverteerbaar, dan zijn zowel A als B inverteerbaar.

(b) Een vierkante bovendriehoeksmatrix waarvan de diagonaalelementen verschillend van 0 zijn, is inverteerbaar.

Herinner dan we $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een bovendriehoeksmatrix noemen als $a_{ij} = 0$ voor alle $i > j$. De diagonaalelementen zijn a_{ii} met $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(c) Als v_1, v_2, v_3 vectoren in een vectorruimte zijn en $v_1 \in \text{vct}\{v_2, v_3\}$, dan is $v_2 \in \text{vct}\{v_1, v_3\}$.

Oplossing.

(a) Waar.

Als AB inverteerbaar is dan is $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$. Hieruit volgt dat $\det(A) \neq 0$ en $\det(B) \neq 0$ en dus dat A en B inverteerbaar zijn.

(b) Waar.

We weten uit Stelling 2.4.1 dat de determinant van een bovendriehoeksmatrix A het product van zijn diagonaalelementen is, in symbolen $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$. Aangezien alle diagonaalelementen niet nul zijn is $\det(A) \neq 0$ en dus is A inverteerbaar.

(c) Onwaar.

Een tegenvoorbeeld is gegeven door $V = \mathbb{R}, v_1 = v_3 = 0$ en $v_2 = 1$. Dan is $v_1 \in \text{vct}\{v_2, v_3\} = \text{vct}\{1, 0\} = \mathbb{R}$, maar $v_2 \neq \text{vct}\{v_1, v_3\} = \text{vct}\{0, 0\} = \{0\}$.

Vraag 3

Zij $V = \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ de vectorruimte van veeltermen met reële coëfficiënten en graad hoogstens n.

(a) Toon aan dan $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n + 1$.

(b) Veronderstel dat $P_0, \ldots, P_n \in V$ willekeurige veeltermen zijn zodat P_i graad i heeft voor elke $i = 0, \ldots, n$. Bewijs dat $\{P_0, \ldots, P_n\}$ een basis van V is.

We gebruiken hier de conventie dat de veeltermen van graad 0 precies de constante veeltermen verschillend van de nulveelterm zijn.

Oplossing.

(a) De verzameling $\{1, X, ..., X^n\}$ is een basis van V, want elke veelterm in V kan op een unieke manier geschreven worden als een lineaire combinatie van de veeltermen $1, X, ..., X^n$. Dus $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n + 1$.

(b) We stellen dat $\{P_0, ..., P_n\}$ een vrij deel is. Dit is voldoende, want er volgt uit stelling 3.44 dan deze verzameling vectoren dan ook voortbrengend is en dus een basis.

Om de uitspraak hierboven na te gaan, redeneren we uit het ongerijmde dat er een niet-triviale lineaire gelijkheid

$$\lambda_0 P_0 + ... + \lambda_n P_n = 0 \tag{1}$$

estaat, met $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ niet allen nul. Bekijk de maximale k die voldoet aan $0 \leq k \leq n$ en $\lambda_k \neq 0$. Door naar de coëfficiënt van X^k te kijken in gelijkheid 1, bekomen we een onmogelijkheid.