Tussentijdse Toets Bewijzen en Redeneren

1ste fase Fysica en Wiskunde
maandag 29 oktober 2018, 16:30–18:00 uur

Fysica: auditorium 200M.00.07
Wiskunde + TWIN: auditorium 200 C Aud A

Naam:

Studierichting:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- De toets bestaat uit 3 vragen. Begin het antwoord op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Puntenverdeling per vraag:

Vraag 1:	6 pt		
Vraag 2:	(a) 4 pt	(b) 8 pt	
Vraag 3:	(a) 4 pt	(b) 4 pt	4 pt

- Als u de toets voldoende maakt, behaalt u een bonus voor het examen van Bewijzen en redeneren:
  - Bij 15 op 30: 1 punt bonus
  - Bij 20 op 30: 1,5 punt bonus
  - Bij 25 op 30: 2 punten bonus
- Succes!

Naam:

Vraag 1 Is de volgende bewering over een verzameling X waar of niet?

$$[\exists x \in X : \forall A \in P(X) : \neg(x \in A)] \implies X = \emptyset.$$

Geef een bewijs indien de bewering waar is; geef een tegenvoorbeeld als ze niet waar is.

Antwoord:

De bewering heeft de vorm $P \implies Q$ met P de bewering

$$P : \quad \exists x \in X : \forall A \in P(X) : \neg(x \in A) \tag{1}$$

en Q de bewering

$$Q : \quad X = \emptyset. \tag{2}$$

We gaan bewijzen dat $P \implies Q$ waar is, door te laten zien dat P niet waar is.

Bewijs van $\neg P$ De ontkenning van (1) is

$$\forall x \in X : \exists A \in P(X) : x \in A. \tag{3}$$

Neem $x \in X$ willekeurig. Dan is $\{x\} \in P(X)$ en er geldt $x \in \{x\}$. Bijgevolg is er een $A \in P(X)$ met $x \in A$ en dit bewijst (3). $\square$

Naam:

Vraag 2 Zij $f : X \to Y$ een functie, $A \in P(X)$ en $B \in P(Y)$.

(a) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de implicatie

$$B \subset f(A) \implies f^{-1}(B) \subset A$$

niet altijd hoeft te gelden.

(b) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : \forall B \in P(Y) : \; B \subset f(A) \implies f^{-1}(B) \subset A$$

geldt als en slechts als f injectief is.

Antwoord:

(a) Een mogelijk voorbeeld is het volgende. Neem $X = \{1, 2\}$, $Y = \{5, 6\}$ en $f : X \to Y$ met $f(1) = f(2) = 5$. We nemen verder $A = \{2\}$ en $B = \{5\}$.

Dan is het eenvoudig in te zien dat $f(A) = \{5\}$ en $f^{-1}(B) = \{1, 2\}$. Bijgevolgt geldt $B \subset f(A)$ maar $f^{-1}(B) \subset A$ geldt niet. De implicatie

$$B \subset f(A) \implies f^{-1}(B) \subset A$$

is onjuist in dit voorbeeld.

Andere voorbeelden zijn uiteraard ook mogelijk. In je voorbeeld zul je een functie f moeten geven die niet injectief is. Je verzameling A zal zodanig moeten zijn dat $x_1 \in A$ en $x_2 \in X \setminus A$ bestaan met $f(x_1) = f(x_2)$. Zulke x_1 en x_2 bestaan omdat f niet injectief is.

De verzameling B moet zodanig zijn dat $f(x_1) = f(x_2) \in B$.

(b) We moeten $P \iff Q$ bewijzen waarin P en Q de volgende twee beweringen zijn

$$P : \quad \forall A \in P(X) : \forall B \in P(Y) : \; B \subset f(A) \implies f^{-1}(B) \subset A \tag{4}$$

$$Q : \quad f \text{ is injectief.} \tag{5}$$

We bewijzen twee implicaties.

Bewijs van $P \implies Q$ We nemen aan dat P geldt.

Om te bewijzen dat f injectief is, nemen we $x_1, x_2 \in X$ willekeurig met $x_1 \neq x_2$. We gaan laten zien dat $f(x_1) \neq f(x_2)$. We kiezen $A = \{x_1\}$ en $B = \{f(x_1)\}$. Vanwege onze aanname (4) geldt

$$B \subset f(A) \implies f^{-1}(B) \subset A. \tag{6}$$

Het is duidelijk dat $f(A) = \{f(x_1)\} = B$ en bijgevolg geldt $B \subset f(A)$. Omdat (6) waar is kunnen we concluderen dat $f^{-1}(B) \subset A$.

Omdat $x_1 \neq x_2$ en $A = \{x_1\}$ geldt $x_2 \neq A$. Vanwege $f^{-1}(B) \subset A$ volgt dan ook $x_2 \neq f^{-1}(B)$. Per definitie van invers beeld betekent dit dat $f(x_2) \notin B$. Omdat $B = \{f(x_1)\}$ volgt er nu dat $f(x_2) \neq f(x_1)$.

Bijgevolg is f injectief.

Bewijs van $Q \implies P$. We nemen nu aan dat Q waar is, dus dat f injectief is. We moeten (4) bewijzen.

Neem $A \in P(X)$ en $B \in P(Y)$ willekeurig en veronderstel dat $B \subset f(A)$. We moeten bewijzen dat $f^{-1}(B) \subset A$.

Kies $x \in f^{-1}(B)$ willekeurig. Dit betekent $f(x) \in B$. Omdat $B \subset f(A)$ volgt er dat $f(x) \in f(A)$. Er bestaat bijgevolg een $a \in A$ met $f(x) = f(a)$. Hieruit volgt, omdat f injectief is, dat $x = a$ en dus dat $x \in A$. Omdat $x \in f^{-1}(B)$ willekeurig gekozen was geldt er dat $f^{-1}(B) \subset A$.

Hiermee is bewezen dat $B \subset f(A) \implies f^{-1}(B) \subset A$ en dus geldt P.

Conclusie Beide implicaties zijn nu bewezen. Hieruit volgt dat de twee beweringen equivalent zijn en onderdeel (b) is bewezen.

Naam:

Vraag 3 In deze opgave is X een willekeurige niet-lege verzameling en Y een vast gekozen deelverzameling van X. We bekijken de volgende relatie op $P(X)$

$$R = \{(A, B) \in P(X) \times P(X) \mid A \subset B \cup Y\}$$

(a) Is R reflexief, symmetrisch, transitief? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(b) Bewijs dat $R \cap R^{-1}$ een equivalentierelatie is.

(c) Neem $X = \{1, 2, 3, 4\}$ en $Y = \{2, 4\}$.

Beschrijf voor dit geval de equivalentieklasse $[\emptyset]$ van de lege verzameling voor de equivalentierelatie uit onderdeel (b). Uit hoeveel elementen bestaat deze equivalentieklasse?

Antwoord:

(a) De relatie R is **reflexief**. Neem $A \in P(X)$ willekeurig. Dan is $A \subset A \cup Y$ en vanwege de definitie van R geldt $(A, A) \in R$. Dit bewijst dat R inderdaad reflexief is.

De relatie R is **niet altijd symmetrisch**. Neem bijvoorbeeld $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{3\}$, $A = \{1\}$ en $B = \{1, 2\}$. Dan geldt $B \cup Y = \{1, 2, 3\}$ zodat $A \subset B \cup Y$ en dus $(A, B) \in R$. Echter $A \cup Y = \{1, 3\}$ en dus geldt $B \subset A \cup Y$ niet. Dus $(B, A) \notin R$. De relatie is niet symmetrisch.

De relatie R is **transitief**. Neem $A, B, C \in P(X)$ willekeurig en veronderstel dat $(A, B) \in R$ en $(B, C) \in R$. Dan geldt $A \subset B \cup Y$ en $B \subset C \cup Y$. We willen bewijzen dat $A \subset C \cup Y$.

Kies daartoe $x \in A$ willekeurig. Omdat $A \subset B \cup Y$ zijn er nu twee mogelijkheden, namelijk $x \in B$ of $x \in Y$. In het eerste geval, $x \in B$, volgt vanwege $B \subset C \cup Y$ dat $x \in C \cup Y$. In het tweede geval, $x \in Y$, volgt ook meteen $x \in C \cup Y$.

In beide gevallen geldt $x \in C \cup Y$ en bijgevolg is $A \subset C \cup Y$. Dit betekent $(A, C) \in R$. De relatie is dus inderdaad transitief.

(b) Om te bewijzen dat $R \cap R^{-1}$ een equivalentierelatie is hoeven we niet terug te grijpen naar de preciese definitie van R. We gebruiken dat R reflexief en transitief is (dat hebben we in onderdeel (a) bewezen) en dat volstaat om te bewijzen $R \cap R^{-1}$ een equivalentierelatie is.

We moeten uiteraard wel de definitie van R^{-1} gebruiken, namelijk

$$R^{-1} = \{(A, B) \in P(X) \times P(X) \mid (B, A) \in R\}.$$

Neem $A \in P(X)$ willekeurig. Omdat R reflexief is, geldt $(A, A) \in R$. Vanwege de definitie van R^{-1} is dan ook $(A, A) \in R^{-1}$. Dus $(A, A) \in R \cap R^{-1}$ en dit bewijst dat $R \cap R^{-1}$ **reflexief** is.

Neem $A, B \in P(X)$ willekeurig en veronderstel dat $(A, B) \in R \cap R^{-1}$. Dan is $(A, B) \in R$ en uit de definitie van R^{-1} volgt dan dat $(B, A) \in R^{-1}$. Ook is $(A, B) \in R^{-1}$ en wederom met de definitie van R^{-1} volgt $(B, A) \in R$. Dus $(B, A) \in R \cap R^{-1}$ en dit toont aan dat $R \cap R^{-1}$ **symmetrisch** is.

Neem $A, B, C \in P(X)$ willekeurig en veronderstel dat $(A, B) \in R \cap R^{-1}$ en $(B, C) \in R \cap R^{-1}$.

Dan is $(A, B) \in R$ en $(B, C) \in R$. Omdat R transitief is (dit hebben we in onderdeel (a) bewezen) volgt dat $(A, C) \in R$.

Tevens geldt $(A, B) \in R^{-1}$ en $(B, C) \in R^{-1}$. Bij definitie van R^{-1} is dan $(B, A) \in R$ en $(C, B) \in R$. Uit de transitiviteit van R volgt nu dat $(C, A) \in R$ en dus $(A, C) \in R^{-1}$.

We vinden dat $(A, C) \in R$ en $(A, C) \in R^{-1}$ en daarom is $(A, C) \in R \cap R^{-1}$. Hiermee is ook bewezen dat $R \cap R^{-1}$ **transitief** is.

(c) De equivalentieklasse van $\emptyset$ is de verzameling

$$\{A \in P(X) \mid (A, \emptyset) \in R \cap R^{-1}\}.$$

$(A, \emptyset) \in R$ betekent dat $A \subset \emptyset \cup Y$, ofwel $A \subset Y$, terwijl $(A, \emptyset) \in R^{-1}$ betekent dat $(\emptyset, A) \in R$ en dit wil zeggen dat $\emptyset \subset A \cup Y$. Aan dat laatste is altijd voldaan.

De equivalentieklasse van $\emptyset$ is dus

$$\{A \in P(X) \mid A \subset Y\}$$

m.a.w. het is de machtsverzameling van $Y = \{2, 4\}$. Expliciet uitgeschreven is dit

$$\{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{2, 4\}\}$$

en het is een verzameling met vier elementen.