Modeloplossing examen lineaire algebra voor informatica

25 januari

Vraag 1

Er wordt hier gevraagd om de dimensiestelling voor lineaire afbeeldingen te bewijzen. Dat is Stelling 4.36 in het handboek. We hebben dit bewijs ook uitgebreid behandeld in de les. De meeste studenten geven het bewijs uit het handboek en de les. Dat is perfect, maar natuurlijk niet verplicht. Ook een alternatief bewijs kan correct zijn, maar het is niet gemakkelijk om zelf een nieuw en correct bewijs op te schrijven.

Voor wie het bewijs uit het handboek en de les geeft, zijn de volgende elementen van belang.

- In het bewijs construeer je basissen voor de kern van L, de vectorruimte V en het beeld van L. Het is belangrijk om dit in de juiste volgorde te doen. Je kiest eerst een basis voor de kern van L. Dat is mogelijk omdat deze kern van L eindigdimensionaal is, als deelruimte van de eindigdimensionale vectorruimte V. Deze basis breid je uit tot een basis van V. Het is dus niet correct om eerst een basis voor V te kiezen en er vervolgens vanuit te gaan dat een deel van deze basis automatisch een basis voor de kern van L is.

- Vervolgens doe je een voorstel van kandidaat-basis voor het beeld van L.

- Om te bewijzen dat die kandidaat-basis effectief een basis is, moet je zowel bewijzen dat deze verzameling vrij is als bewijzen dat deze verzameling voortbrengend is.

Vraag 2

Waar of fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(a) Veronderstel dat $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrices zijn en dat $AB = BA = 0$. Dan is $(A+B)^k = A^k + B^k$ voor alle natuurlijke getallen $k \geq 1$.

(b) Zij $L : V \to V$ een lineaire transformatie van een eindigdimensionale reële vectorruimte V. Zij λ_1, λ_2 twee verschillende reële eigenwaarden van L. Dan geldt

$$E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} = \left\{ v \in V \;\middle|\; L(v) = \lambda_1 v \;\text{ of }\; L(v) = \lambda_2 v \right\} .$$

(c) Als $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een symmetrische matrix is waarvan de karakteristieke veelterm gelijk is aan $(X-1)^n$, dan is A gelijk aan de $n \times n$ eenheidsmatrix.

Oplossing

(a) De uitspraak is waar. We bewijzen deze via inductie op k. De basisstap, voor $k = 1$, is triviaal gezien $(A + B)^1 = A + B = A^1 + B^1$. Hiervoor is het extra gegeven $AB = BA = 0$ niet nodig. Veronderstel nu vervolgens dat voor alle $n \leq k$ geldt dat

$$(A+B)^n = A^n + B^n, \tag{IH}$$

voor een zekere $k \in \mathbb{N}$. Dan berekenen we nu voor $k \geq 2$ dat:

$$\begin{aligned}
(A+B)^{k+1} &= (A+B)^k(A+B) \\
&= (A^k + B^k)(A+B) && \text{(wegens IH)} \\
&= A^{k+1} + A^{k-1}AB + B^{k-1}A + B^{k+1} && (k \geq 2) \\
&= A^{k+1} + B^{k+1}. && \text{(wegens } AB = BA = 0\text{, gegeven)}
\end{aligned}$$

Bijgevolg geldt de stelling voor alle $n \leq k + 1$. Hiermee is de stelling via inductie bewezen.

Opmerkingen

- Dit is geen moeilijk bewijs, zorg er dan ook voor dat het verzorgd en duidelijk is. Vermeld dat je *inductie* gebruikt, vergeet de *basisstap* niet, vermeld duidelijk *wat* de inductiehypothese is, duid duidelijk aan *waar* je deze gebruikt en vermeld ook dat wanneer je $AB = BA = 0$ gebruikt, dit *gegeven* is.

- De matrixvermenigvuldiging is niet commutatief, het “binomium van Newton” heeft dus enigszins een andere vorm dan gewoonlijk. Indien dit in een “commutatieve” versie gebruikt werd, werd dit sowieso aangerekend.

(b) De uitspraak is fout. Beschouw bijvoorbeeld de lineaire afbeelding $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x, -y)$. Het is eenvoudig in te zien dat de lineaire afbeelding de eigenwaarden 1 en -1 heeft met als eigenruimten $E_1 = \langle(1, 0)\rangle$ en $E_{-1} = \langle(0, 1)\rangle$. Beschouw nu de vector $v = (1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$, welke duidelijk een som is van een vector uit E_1 en een vector uit E_2. Maar $L(1, 1) = (1, -1)$ is niet gelijk aan $1 \cdot (1, 1)$ of $(-1) \cdot (1, 1)$, bijgevolg is v geen element van de verzameling

$$\{v \in \mathbb{R}^2 \mid L(v) = v \text{ of } L(v) = -v\}.$$

Dit toont aan dat beide verzamelingen dus niet gelijk zijn.

Opmerkingen

- Sommigen hielden het liever abstract en gaven geen concrete eigenruimten of eigenwaarden. In dat geval moet je wel duidelijk in je bewijs aanduiden waar je gebruikt dat λ_1 en λ_2 verschillend zijn. Dit is immers cruciaal om te bekomen dat de eigenruimten niet in elkaar omvat zijn (zie oef 5, p. 129).

(c) De uitspraak is waar. Als A reëel en symmetrisch is, dan is ze diagonaliseerbaar over $\mathbb{R}$. Omdat het gegeven is dat de karakteristieke veelterm van A gelijk is aan $(X - 1)^n$, besluiten we dat 1 de enige eigenwaarde van A is. Omdat A diagonaliseerbaar is, bestaat er een inverteerbare matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en een diagonaalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zodat

$$A = P^{-1}DP.$$

Op de diagonaal van D, staan de eigenwaarden van A, welke in dit geval allemaal 1 zijn. Met andere woorden: D is de eenheidsmatrix. Maar dan volgt uit bovenstaande vergelijking dat $A = P^{-1}P = I_n$ ook de eenheidsmatrix is.

Opmerkingen

- Het is zeer belangrijk om te vermelden dat uit het gegeven volgt dat A diagonaliseerbaar is.

- Zorg dat je nauwkeurig aantoont dat A de eenheidsmatrix is. Ofwel expliciet, zoals hierboven, ofwel door duidelijk te vermelden dat $AX_i = X_i$ voor een *basis* $\{X_1, \ldots, X_n\}$ van eigenvectoren voor A, waaruit dan ook volgt dat $A = I_n$ (al heb je hier in feite nog extra argumentatie nodig).
- Vaak werd een redenering van de vorm "aangezien de karakteristieke veelterm zo eenvoudig is, kan het niet anders dat A de eenheidsmatrix is" gegeven. Dit is geen wiskundig bewijs, sterker nog, dit is zowaar het gegeven gebruiken om je stelling te bewijzen. Ook zeer technische berekeningen, die onvolledig en vaag waren, om deze redenering aan te tonen, werden fout gerekend. Deze vraag is een mooi voorbeeld waar zeer complexe berekeningen vervangen kunnen worden door een korte en precieze uitleg.

Vraag 3

Zij $\alpha \in \mathbb{R}$ en beschouw de lineaire afbeelding

$$L_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : L_\alpha(x, y, z) = (y, \alpha x + z, 2y) \ .$$

Voor welke waarden van $\alpha \in \mathbb{R}$ is L_α diagonaliseerbaar over $\mathbb{R}$? Voor welke waarden van $\alpha \in \mathbb{R}$ is L_α diagonaliseerbaar over $\mathbb{C}$?

Oplossing

Een lineaire afbeelding is diagonaliseerbaar over $\mathbb{C}$ (of $\mathbb{R}$) als en slechts als de algebraïsche multpliciteit van elke eigenwaarde gelijk is aan de meetkunde multipliciteit (en alle complexe eigenwaarden reëel zijn). Een speciaal geval is als de algebraïsche multpliciteit van elke eigenwaarde 1 is. Dan is de meetkunde multipliciteit automatisch gelijk aan de algebraïsche multpliciteit omdat we voor alle eigenwaarden λ dan hebben dat $1 \leq d(\lambda) \leq m(\lambda) = 1$. In dit geval zeggen we dat het spectrum enkelvoudig is. Zie Stelling 5.23 en Gevolg 5.20 in het boek.

Zij β de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$. Dan heeft L_α de matrixvoorstelling

$$(L_\alpha)_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

De karakteristieke veelterm van deze matrix is

$$\begin{aligned}\psi_{L_\alpha}(X) = \det \begin{pmatrix} X & -1 & 0 \\ -\alpha & X & -1 \\ 0 & -2 & X \end{pmatrix} &= X \det \begin{pmatrix} X & -1 \\ -2 & X \end{pmatrix} + \alpha \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & X \end{pmatrix} \\ &= X^3 - \alpha X - 2X = X(X + \sqrt{\alpha + 2})(X - \sqrt{\alpha + 2}).\end{aligned}$$

We kunnen nu 3 gevallen onderscheiden.

1. Als $\alpha = -2$ dan is 0 de enige eigenwaarde van L_{-2} met algebraïsche multipliciteit $m(0) = 3$. We berekenen nu de meetkundige multipliciteit $d(0)$. Dit is de dimensie van de nulruimte van de matrix

$$0 - (L_{-2})_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{R_3 \to R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

   We zien dat $d(0) = 1 \neq 3 = m(0)$ dus L_{-2} is niet diagonaliseerbaar over $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$.

2. Als $\alpha < -2$ dan zijn niet alle eigenwaarden van L_α reëel dus L_α kan niet diagonaliseerbaar zijn over $\mathbb{R}$. Maar over de complexe getallen zijn de getallen $0, \sqrt{\alpha+2}, -\sqrt{\alpha+2}$ verschillend. Het spectrum van L_α is dus enkelvoudig. De lineaire afbeelding L_α is dan diagonaliseerbaar over .

3. Als $\alpha > -2$ dan zijn alle eigenwaarden van L_α reëel en is het spectrum opnieuw enkelvoudig. De lineaire afbeelding L_α is dus diagonaliseerbaar over $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$.

We concluderen dat L_α diagonaliseerbaar is over $\mathbb{R}$ als $\alpha > -2$ en diagonaliseerbaar is over $\mathbb{C}$ als $\alpha \neq -2$.

Opmerkingen

- Het toepassen van rij-operaties op $(L_\alpha)_\beta^\beta$ kan de diagonaliseerbaarheid van deze matrix veranderen.
- Het is equivalent om aan te tonen dat de getransponeerde van $(L_\alpha)_\beta^\beta$ diagonaliseerbaar is. Maar aantonen dat de getransponeerde diagonaliseerbaar is zonder dit expliciet op te merken is niet voldoende.
- Een matrix met een niet enkelvoudig spectrum kan diagonaliseerbaar en niet-diagonaliseerbaar zijn. Het is nodig $d(0)$ uit te rekenen in het geval $\alpha = -2$ om te zien welke van de twee het is.
- Voor de gevallen $\alpha \neq -2$ kan men ook expliciet de eigenruimtes berekenen om aan te tonen dat de lineaire afbeeldingen diagonaliseerbaar zijn in plaats van te gebruiken dat dit volgt uit het feit dat het spectrum enkelvoudig is.
- De eigenruimte bijbehorend bij een eigenwaarde kan nooit de dimensie 0 hebben.