Examen Lineaire Algebra eerste zit 2021-22
Modeloplossingen

Wiskunde & Fysica: vraag 1

Vraag. *Zij V een eindigdimensionale reële vectorruimte en zij $L : V \to V$ een lineaire transformatie. Veronderstel dat $\lambda \in \mathbb{R}$ een eigenwaarde van L is.*

- *Wat verstaan we onder de meetkundige multipliciteit $d(\lambda)$ en de algebraïsche multipliciteit $m(\lambda)$ van deze eigenwaarde λ ?*
- *Bewijs dat $1 \leq d(\lambda) \leq m(\lambda)$.*

De relevante antwoorden staan expliciet in de cursustekst, hoofdstuk 5.

Wiskunde & Fysica: vraag 2

Vraag. *Waar of fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.*

(a) *Zij $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ een lineaire transformatie van $\mathbb{R}^2$. Veronderstel dat de vectoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ beide verschillend zijn van de nulvector en dat $\operatorname{Ker} L = \operatorname{vct}\{v\}$ en $\operatorname{Im} L = \operatorname{vct}\{w\}$. Dan is $\{v, w\}$ een basis voor $\mathbb{R}^2$.*

(b) *Zij $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ twee 3×3 matrices. Veronderstel dat $AB = 0$. Dan is $\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B \leq 3$.*

(c) *Zij $n \geq 1$ en zij $v \in \mathbb{R}^n$ een vector verschillend van de nulvector. Dan is de verzameling*

$$\left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \;\middle|\; v \text{ is een eigenvector van } A\right\}$$

een deelruimte van $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Antwoord.

(a) Fout, een tegenvoorbeeld kan gegeven worden als volgt. Stel $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, en bekijk $L = L_A$. Dan is $\operatorname{Ker} L = \operatorname{Im} L = \operatorname{vct}\{(1, 0)\}$. Bijgevolg is voor elke keuze van $v \in \operatorname{Ker} L$ en $w \in \operatorname{Im} L$ de verzameling $\{v, w\}$niet vrij. Dit betekent dat $\{v, w\}$ nooit een basis van $\mathbb{R}^2$ kan zijn.

(b) Waar. Uit de aanname volgt dat elke kolom van B in $N(A)$ ligt. Bijgevolg is $C(B) \subset N(A)$, en dus

$$\dim C(B) \leq \dim N(A).$$

Enerzijds weten we dat $\dim C(B) = \operatorname{rang} B$. Aan de andere kant is wegens de dimensiestelling $\dim N(A) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim C(A) = 3 - \operatorname{rang} A$. Nemen we dit samen, vinden we dat

$$\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B = 3 - \dim N(A) + \dim C(B) \leq 3,$$

zoals gevraagd.

(c) Juist, we gebruiken het deelruimtecriterium. Voor notationeel gemak noemen we de gegeven verzameling W.

- Merk op dat W evident een deelverzameling is van $\mathbb{R}^{n\times n}$, en ze is bovendien niet leeg aangezien W altijd de nulmatrix bevat (elke vector in $\mathbb{R}^n$ is immers een eigenvector van de nulmatrix).
- Stel vervolgens dat $A, B \in W$, we gaan na dat $A + B \in W$. Per definitie bestaan er $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ zodat $Av = \lambda v$ en $Bv = \mu v$. Dan is
$$(A + B)v = Av + Bv = \lambda v + \mu v = (\lambda + \mu)v,$$
en dus is v een eigenvector van $A + B$ met eigenwaarde $\lambda + \mu$, viz. $A + B \in W$.
- Op een gelijkaardige manier kunnen we inzien dat als $A \in W$ en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan $(\lambda A) \in W$. Inderdaad, per definitie bestaat er een $\mu \in \mathbb{R}$ zodat $Av = \mu v$, en dus
$$(\lambda A)v = \lambda(Av) = \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v.$$
Hieruit volgt dat v een eigenvector is van λA met eigenwaarde $\lambda\mu$, zodat $A \in W$.

Wiskunde & Fysica: vraag 3

Vraag. *Voor elke 3×3 matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ beschouwen we de bijhorende lineaire afbeelding $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto A\cdot x$, waarbij we elementen $x \in \mathbb{R}^3$ voorstellen als kolomvectoren. Beschouw de deelruimten $W_1 = \operatorname{vct}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ en $W_2 = \operatorname{vct}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ van de vectorruimte $\mathbb{R}^3$. Definieer dan de volgende deelverzameling van $\mathbb{R}^{3\times 3}$.*
$$W = \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid L_A(W_1) \subset W_1 \text{ en } L_A(W_2) \subset W_2\right\}.$$

(a) Toon aan dat W een deelruimte van $\mathbb{R}^{3\times 3}$ is.

(b) Geef een basis van W en bepaal de dimensie van W.

Antwoord.

(a) We introduceren de volgende notatie:
$$V_1 := \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid L_A(W_1) \subset W_1\right\}, \quad V_2 := \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid L_A(W_2) \subset W_2\right\}.$$
Met deze notatie geldt er dat $W = V_1 \cap V_2$. We tonen aan dat V_1 een deelruimte is door het deelruimtecriterium (Stelling 3.11) na te gaan. Merk eerst op dat V_1 niet leeg is. Inderdaad, $0_3 := \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \in V_1$ aangezien $0_3 \cdot x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in W_1$ voor alle $x \in \mathbb{R}^3$ dus in het bijzonder voor alle $x \in W_1$. Neem nu $A, B \in V_1$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en $x \in W_1$ willekeurig. Reken uit:
$$L_{\lambda A+\mu B}(x) = (\lambda A + \mu B)\cdot x = \lambda A \cdot x + \mu B \cdot x.$$
Aangezien $A \in V_1$ geldt er dat $A \cdot x \in W_1$ en aangezien W_1 een deelruimte is volgt dat $\lambda A \cdot x \in W_1$. Volledig analoog geldt er dat $\mu B \cdot x \in W_1$. Door nogmaals te gebruiken dat W_1 een deelruimte is volgt er dat
$$L_{\lambda A+\mu B}(x) = \lambda A \cdot x + \mu B \cdot x \in W_1.$$

Aangezien deze berekening geldt voor alle $x \in W_1$ geldt er dat $L_{\lambda A+\mu B}(W_1) \subset W_1$ en dus behoort $\lambda A + \mu B$ tot V_1. Dit toont aan dat V_1 een deelruimte is. Aantonen dat V_2 ook een deelruimte is volledig analoog.

Aangezien de doorsnede van twee deelruimten opnieuw een deelruimte is (Propositie 3.14), is $W = V_1 \cap V_2$ ook een deelruimte van $\mathbb{R}^3$.

(b) Merk op dat $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in W$ als en slechts als

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1,\ A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1,\ A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_2 \text{ en } A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_2.$$

Dit geldt aangezien $W_1 = \operatorname{vct}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ en $W_2 = \operatorname{vct}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ en $L_A(W_1)$ en $L_A(W_2)$ worden voortgebracht door de beelden van de basis (van respectievelijk W_1 en W_2). We rekenen uit:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}.$$

Dus $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1$ als en slechts als $a_{31} = 0$, $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1 \cap W_2$ als en slechts als $a_{12} = a_{32} = 0$ en $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_2$ als en slechts als $a_{13} = 0$. Bijgevolg vinden we:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Door afzonderlijk één van de variabelen gelijk te stellen aan 1 en de anderen aan 0 vinden we de volgende basis van W:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(Deze basis is natuurlijk niet uniek!) De dimensie van W is dus 5.