Examen Lineaire Algebra eerste zit 2021-22
Modeloplossingen

Wiskunde & Fysica: vraag 1

Vraag. *Zij V een eindigdimensionale reële vectorruimte en zij $L : V \to V$ een lineaire transformatie. Veronderstel dat $\lambda \in \mathbb{R}$ een eigenwaarde van L is.*

- *Wat verstaan we onder de meetkundige multipliciteit $d(\lambda)$ en de algebraïsche multipliciteit $m(\lambda)$ van deze eigenwaarde λ ?*
- *Bewijs dat $1 \leq d(\lambda) \leq m(\lambda)$.*

De relevante antwoorden staan expliciet in de cursustekst, hoofdstuk 5.

Wiskunde & Fysica: vraag 2

Vraag. *Waar of fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.*

(a) *Zij $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ een lineaire transformatie van $\mathbb{R}^2$. Veronderstel dat de vectoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ beide verschillend zijn van de nulvector en dat* $\operatorname{Ker} L = \operatorname{vct}\{v\}$ *en* $\operatorname{Im} L = \operatorname{vct}\{w\}$. *Dan is $\{v, w\}$ een basis voor $\mathbb{R}^2$.*

(b) *Zij $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ twee 3×3 matrices. Veronderstel dat $AB = 0$. Dan is* $\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B \leq 3$.

(c) *Zij $n \geq 1$ en zij $v \in \mathbb{R}^n$ een vector verschillend van de nulvector. Dan is de verzameling*

$$\left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \;\middle|\; v \textit{ is een eigenvector van } A\right\}$$

een deelruimte van $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Antwoord.

(a) Fout, een tegenvoorbeeld kan gegeven worden als volgt. Stel $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, en bekijk $L = L_A$. Dan is $\operatorname{Ker} L = \operatorname{Im} L = \operatorname{vct}\{(1, 0)\}$. Bijgevolg is voor elke keuze van $v \in \operatorname{Ker} L$ en $w \in \operatorname{Im} L$ de verzameling $\{v, w\}$niet vrij. Dit betekent dat $\{v, w\}$ nooit een basis van $\mathbb{R}^2$ kan zijn.

(b) Waar. Uit de aanname volgt dat elke kolom van B in $N(A)$ ligt. Bijgevolg is $C(B) \subset N(A)$, en dus

$$\dim C(B) \leq \dim N(A).$$

Enerzijds weten we dat $\dim C(B) = \operatorname{rang} B$. Aan de andere kant is wegens de dimensiestelling $\dim N(A) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim C(A) = 3 - \operatorname{rang} A$. Nemen we dit samen, vinden we dat

$$\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B = 3 - \dim N(A) + \dim C(B) \leq 3,$$

zoals gevraagd.

(c) Juist, we gebruiken het deelruimtecriterium. Voor notationeel gemak noemen we de gegeven verzameling W.

- Merk op dat W evident een deelverzameling is van $\mathbb{R}^{n\times n}$, en ze is bovendien niet leeg aangezien W altijd de nulmatrix bevat (elke vector in $\mathbb{R}^n$ is immers een eigenvector van de nulmatrix).
- Stel vervolgens dat $A, B \in W$, we gaan na dat $A + B \in W$. Per definitie bestaan er $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ zodat $Av = \lambda v$ en $Bv = \mu v$. Dan is

$$(A + B)v = Av + Bv = \lambda v + \mu v = (\lambda + \mu)v,$$

en dus is v een eigenvector van $A + B$ met eigenwaarde $\lambda + \mu$, viz. $A + B \in W$.
- Op een gelijkaardige manier kunnen we inzien dat als $A \in W$ en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan $(\lambda A) \in W$. Inderdaad, per definitie bestaat er een $\mu \in \mathbb{R}$ zodat $Av = \mu v$, en dus

$$(\lambda A)v = \lambda(Av) = \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v.$$

Hieruit volgt dat v een eigenvector is van λA met eigenwaarde $\lambda\mu$, zodat $A \in W$.

Wiskunde & Fysica: vraag 3

Vraag. *Voor elke* 3×3 *matrix* $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *beschouwen we de bijhorende lineaire afbeelding* $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto A \cdot x$*, waarbij we elementen* $x \in \mathbb{R}^3$ *voorstellen als kolomvectoren. Beschouw de deelruimten* $W_1 = \operatorname{vct}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ *en* $W_2 = \operatorname{vct}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ *van de vectorruimte* $\mathbb{R}^3$*. Definieer dan de volgende deelverzameling van* $\mathbb{R}^{3\times 3}$*.*

$$W = \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid L_A(W_1) \subset W_1 \text{ en } L_A(W_2) \subset W_2\right\}.$$

(a) Toon aan dat W *een deelruimte van* $\mathbb{R}^{3\times 3}$ *is.*

(b) Geef een basis van W *en bepaal de dimensie van* W*.*

Antwoord.

(a) We introduceren de volgende notatie:

$$V_1 := \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid L_A(W_1) \subset W_1\right\}, \quad V_2 := \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid L_A(W_2) \subset W_2\right\}.$$

Met deze notatie geldt er dat $W = V_1 \cap V_2$. We tonen aan dat V_1 een deelruimte is door het deelruimtecriterium (Stelling 3.11) na te gaan. Merk eerst op dat V_1 niet leeg is. Inderdaad, $0_3 := \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \in V_1$ aangezien $0_3 \cdot x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in W_1$ voor alle $x \in \mathbb{R}^3$ dus in het bijzonder voor alle $x \in W_1$. Neem nu $A, B \in V_1$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en $x \in W_1$ willekeurig. Reken uit:

$$L_{\lambda A+\mu B}(x) = (\lambda A + \mu B) \cdot x = \lambda A \cdot x + \mu B \cdot x.$$

Aangezien $A \in V_1$ geldt er dat $A \cdot x \in W_1$ en aangezien W_1 een deelruimte is volgt dat $\lambda A \cdot x \in W_1$. Volledig analoog geldt er dat $\mu B \cdot x \in W_1$. Door nogmaals te gebruiken dat W_1 een deelruimte is volgt er dat

$$L_{\lambda A+\mu B}(x) = \lambda A \cdot x + \mu B \cdot x \in W_1.$$

Aangezien deze berekening geldt voor alle $x \in W_1$ geldt er dat $L_{\lambda A+\mu B}(W_1) \subset W_1$ en dus behoort $\lambda A + \mu B$ tot V_1. Dit toont aan dat V_1 een deelruimte is. Aantonen dat V_2 ook een deelruimte is volledig analoog.

Aangezien de doorsnede van twee deelruimten opnieuw een deelruimte is (Propositie 3.14), is $W = V_1 \cap V_2$ ook een deelruimte van $\mathbb{R}^3$.

(b) Merk op dat $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in W$ als en slechts als

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1,\ A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1,\ A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_2 \text{ en } A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_2.$$

Dit geldt aangezien $W_1 = \operatorname{vct}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ en $W_2 = \operatorname{vct}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ en $L_A(W_1)$ en $L_A(W_2)$ worden voortgebracht door de beelden van de basis (van respectievelijk W_1 en W_2). We rekenen uit:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}.$$

Dus $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1$ als en slechts als $a_{31} = 0$, $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1 \cap W_2$ als en slechts als $a_{12} = a_{32} = 0$ en $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_2$ als en slechts als $a_{13} = 0$. Bijgevolg vinden we:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Door afzonderlijk één van de variabelen gelijk te stellen aan 1 en de anderen aan 0 vinden we de volgende basis van W:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(Deze basis is natuurlijk niet uniek!) De dimensie van W is dus 5.

Informatica: vraag 1

Vraag. *Zij V een eindigdimensionale reële vectorruimte en zij $L : V \to V$ een lineaire transformatie.*

- *Veronderstel dat $v_1, \ldots, v_n$ eigenvectoren van L zijn met onderling verschillende eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Bewijs dat de vectoren $v_1, \ldots, v_n$ lineair onafhankelijk zijn.*
- *Wanneer noemen we het spectrum van L enkelvoudig?*
- *Veronderstel dat L een enkelvoudig spectrum heeft. Bewijs dat L diagonaliseerbaar is.*

De relevante antwoorden staan expliciet in de cursustekst, hoofdstuk 5.

Informatica: vraag 2

Vraag. *Waar of fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.*

(a) *Zij V en W vectorruimten en veronderstel dat $L : V \to W$ en $K : V \to W$ lineaire afbeeldingen zijn. Definieer de lineaire afbeelding $L + K : V \to W : v \mapsto L(v) + K(v)$. Dan is $\mathrm{Im}(L + K) = \mathrm{Im}(L) + \mathrm{Im}(K)$.*

(b) *Zij $\{v, w\}$ een willekeurige basis voor de vectorruimte $\mathbb{R}^2$. Dan bestaat er een inproduct op $\mathbb{R}^2$ waarvoor $\{v, w\}$ een orthonormale basis is.*

(c) *De verzameling $\left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; 0 \text{ is een eigenwaarde van } A\right\}$ is een deelruimte van $\mathbb{R}^{2\times 2}$.*

Antwoord.

(a) Fout. Om een tegenvoorbeeld te geven, neem bijvoorbeeld $V = W = \mathbb{R}$ en $L = \mathrm{Id}$, $K = -\mathrm{Id}$. Dan is $L+K$ de nulafbeelding, zodat $\mathrm{Im}(L+K) = \{0\}$. Maar $\mathrm{Im}(L) = \mathrm{Im}(K) = \mathbb{R}$, dus $\mathrm{Im}(L) + \mathrm{Im}(K) = \mathbb{R}$. Dus voor deze keuze van V, W, L, K zal $\mathrm{Im}(L + K) \neq \mathrm{Im}(L) + \mathrm{Im}(K)$.

(b) Waar. Stel dat $\beta = \{v, w\}$ een willekeurige basis van $\mathbb{R}^2$ is. We gaan een inproduct op $\mathbb{R}^2$ definiëren als volgt. Stel dat $x, y \in \mathbb{R}^2$ twee willekeurige vectors in $\mathbb{R}^2$ zijn. Dan bestaan er unieke scalairen $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ zodat

$$x = x_1 v + x_2 w,\ y = y_1 v + y_2 w,$$

met andere woorden $\mathrm{co}_\beta = (x_1, x_2)$ en $\mathrm{co}_\beta = (y_1, y_2)$.

We definiëren

$$\langle x, y\rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Met andere woorden, $\langle x, y\rangle = \langle \mathrm{co}_\beta(x), \mathrm{co}_\beta(y)\rangle_{std}$, waarbij $\langle \cdot, \cdot\rangle_{std}$ het standaard inproduct is op $\mathbb{R}^2$.

We gaan eerst na dat $\langle \cdot, \cdot\rangle$ inderdaad een inproduct is. Hiervoor gaan we de eigenschappen uit de definitie van een inproduct na (definitie 6.1). Zij x, y, z willekeurige vectoren in $\mathbb{R}^2$, en stel $\mathrm{co}_\beta(x) = (x_1, x_2)$, $\mathrm{co}_\beta(y) = (y_1, y_2)$, $\mathrm{co}_\beta(z) = (z_1, z_2)$.

- *lineair in de eerste component: voor alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ geldt $\langle \lambda x + \mu z, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \mu\langle z, y\rangle$.*
  Merk op dat $\mathrm{co}_\beta(\lambda x + \mu z) = (\lambda x_1 + \mu z_1, \lambda x_2 + \mu z_2) = \lambda\,\mathrm{co}_\beta(x) + \mu\,\mathrm{co}_\beta(z)$. Bijgevolg

$$\begin{aligned}\langle \lambda x + \mu z, y\rangle &= \langle \lambda\,\mathrm{co}_\beta(x) + \mu\,\mathrm{co}_\beta(z), \mathrm{co}_\beta(y)\rangle_{std}\\ &= \lambda\langle \mathrm{co}_\beta(x), \mathrm{co}_\beta(y)\rangle_{std} + \mu\langle \mathrm{co}_\beta(z), \mathrm{co}_\beta(y)\rangle_{std}\\ &= \lambda\langle x, y\rangle + \mu\langle z, y\rangle,\end{aligned}$$

  waarbij we gebruiken dat het standaard inproduct een inproduct is.
- *symmetrisch: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.*
  Deze eigenschap volgt onmiddellijk uit onze definitie, aangezien $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 = y_1x_1 + y_2x_2 = \langle y, x\rangle$.
- *positief definiet: $\langle x, x\rangle \geq 0$ met gelijkheid als en slechts als $x = 0$.*
  Inderdaad, $\langle x, x\rangle = x_1^2 + x_2^2$ is steeds niet-negatief omdat kwadraten nooit negatief zijn, en deze laatste uitdrukking is enkel nul als en slechts $x_1 = x_2 = 0$, i.e. $x = 0$.

Tenslotte gaan we na dat $\{v, w\}$ een orthonormale basis ten opzicht van dit inproduct. Merk op dat $\mathrm{co}_\beta(v) = (1, 0)$ en $\mathrm{co}_\beta(w) = (0, 1)$. Hieruit volgt $\langle v, v\rangle = \langle (1, 0), (1, 0)\rangle = 1$. Op geheel gelijkaardige wijze vindt men $\langle w, w\rangle = 1$ en $\langle v, w\rangle = 0$.

(c) Fout. Om dit te staven zullen we aantonen dat er niet aan het deelruimtecriterium is voldaan. Noem de gegeven verzameling S, dan zullen we 2 matrices A, B in S geven zodat $A + B \notin S$. Merk op dat een matrix in S ligt als en slechts deze niet inverteerbaar is. Inderdaad, een matrix is inverteerbaar als en slechts als de geassocieerde nulruimte gelijk is aan $\{0\}$, dat is, er zijn geen eigenvectoren met eigenwaarde 0.

We bekijken $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dan is $A \in S$ en $B \in S$, want elks A en B hebben een nulrij en zijn daarom niet inverteerbaar. Maar $A + B$ is de eenheidsmatrix, en deze is inverteerbaar en dus niet in S.

Informatica: vraag 3

Vraag. *Zij $a \in \mathbb{R}$ en $A = \begin{pmatrix} a & 2-3a & -1+2a \\ 0 & 1-a & a \\ 0 & -a & 1+a \end{pmatrix}$.*

(a) *Bepaal alle $a \in \mathbb{R}$ zodat A diagonaliseerbaar is over $\mathbb{R}$.*

(b) *Bepaal voor deze waarden van $a \in \mathbb{R}$ een basis van eigenvectoren van A.*

Antwoord.

(a) We bepalen eerst de eigenwaarden van A. Dit doen we door de karakteristieke veelterm $\varphi_A(X)$ te berekenen.

$$\begin{aligned}\varphi_A(X) &= \begin{vmatrix} X-a & -2+3a & 1-2a \\ 0 & X-1+a & -a \\ 0 & a & X-1-a \end{vmatrix} = (X-a)\begin{vmatrix} X-1+a & -a \\ a & X-1-a \end{vmatrix}\\ &= (X-a)((X-1+a)(X-1-a)+a^2) = (X-a)((X-1)^2 - a^2 + a^2)\\ &= (X-a)(X-1)^2.\end{aligned}$$

Bijgevolg vinden we dat 1 en a eigenwaarden zijn van A. Als $a \neq 1$ is 1 een eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 2 en a een eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 1. Als $a = 1$ vallen beide eigenwaarden samen en heeft de eigenwaarde $a = 1$ algebraïsche multipliciteit 3. Merk op dat $\varphi_A(X)$ ontbindt als lineaire factoren over $\mathbb{R}$. Stelling 5.23, toegepast op $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : X \to A \cdot X$, vertelt ons dat L_A, en dus ook A, diagonaliseerbaar is als en slechts als de meetkundige multipliciteit van elke eigenwaarde gelijk is aan diens algebraïsche multipliciteit. Merk op dat $1 \leq d(a) \leq m(a)$ wegens stelling 5.16. Als $a \neq 1$ zijn de meetkundige en algebraïsche multipliciteit van a dus steeds gelijk. Bijgevolg volstaat het om na te gaan wanneer $d(1) = m(1)$ (voor alle gevallen van a, ook als $a = 1$).
Bereken

$$\begin{aligned} E_1 = N(A - 1 \cdot \mathbb{I}_3) &= \left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & 2-3a & -1+2a & 0 \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & -a & a & 0 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & 2-3a & -1+2a & 0 \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \end{aligned}$$

Stel dat $a = 1$. Dan krijgen we

$$E_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dus $d(1) = 2$ (één leidende 1).
Stel dat $a \neq 1$. Dan vinden we

$$E_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & 2-3a & -1+2a & 0 \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{a-1} \cdot R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2-3a}{a-1} & \frac{-1+2a}{a-1} & 0 \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

We mogen door $a - 1$ delen want $a \neq 1$. Stel dat $a = 0$. Dan

$$E_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dus $d(1) = 2$ (één leidende 1).
Stel tenslotte dat $a \notin \{0, 1\}$. Dan geldt er

$$E_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2-3a}{a-1} & \frac{-1+2a}{a-1} & 0 \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{-a} \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2-3a}{a-1} & \frac{-1+2a}{a-1} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

We mogen door $-a$ delen want $a \neq 0$. We vinden $d(1) = 1$ (twee leidende 1-en). Samengevat heben we

$$d(1) = \begin{cases} 2 & \text{als } a \in \{0, 1\} \\ 1 & \text{anders.} \end{cases}$$

Wanneer we dit vergelijken met de waarden van $m(1)$ zien we dat er enkel een gelijkheid is wanneer $a = 0$. Bijgevolg vinden we dat A diagonaliseerbaar is als en slechts als $a = 0$.

(b) We bepalen voor $a = 0$ een basis van eigenvectoren van A. Als we terugkijken naar de berekening in deelvraag (a), zien we dat $E_1 = \{(2\lambda - \mu, \lambda, \mu)\} = \text{vct}\{(2,1,0), (-1,0,1)\}$. Bereken tenslotte

$$E_a = E_0 = N(A - 0 \cdot \mathbb{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Het is nu niet meer lastig om in te zien dat $E_a = \{(\lambda, 0, 0) | \lambda \in \mathbb{R}\} = \text{vct}\{(1,0,0)\}$. Bijgevolg vinden we de basis van eigenvectoren $\{(2,1,0), (-1,0,1), (1,0,0)\}$ van A (voor $a = 0$). Het feit dat dit een basis is, volgt uit het bewijs van Stelling 5.23.