Voorbeeldvragen Examen Complexe Analyse

Vraag 1 Zij Ω een gebied, $a \in \Omega$ en f een analytische functie op $\Omega \setminus \{a\}$. Veronderstel dat er $M > 0$ en p met $0 < p < 1$ bestaan zodanig dat

$$|f(z)| \leq M|z-a|^{-p} \qquad \text{voor alle } z \in \Omega.$$

(a) Bewijs dat a een ophefbare singulariteit van f is.

(b) Zij $r > 0$ zodanig dat $D(a,r) \subset \Omega$. Leg uit hoe u dan de integraal

$$\int_{C(a,r)} f(z)\, dz$$

zou kunnen bepalen.

Vraag 2 (a) Voor welke $a \in \mathbb{C}$ is de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ax}}{1+e^x}\, dx$$

convergent ?

(b) Bereken de integraal uit (a) voor die waarden van a waarvoor ze convergeert.

[Hint: Beschouw een rechthoekige contour met als hoekpunten $\pm R$ en $\pm R + 2\pi i$.]

Vraag 3 (a) Neem aan dat (p_n) een rij veeltermen is met $p_n(z) \to 1$ uniform voor z op de eenheidscirkel $C(0,1)$. Gebruik het maximumprincipe om aan te tonen dat $p_n(z) \to 1$ uniform voor z in de eenheidsschijf $D(0,1)$.

(b) Laat zien dat er een $\varepsilon > 0$ bestaat zodanig dat

$$\max_{z \in C(0,1)} \left| p(z) - \frac{1}{z} \right| \geq \varepsilon$$

geldt voor elke veelterm p.

(c) **Bonusvraag**: Wat is de grootst mogelijke waarde van ε die in onderdeel (b) gebruikt zou kunnen worden?

Vraag 4 Beschouw het gebied $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < \sqrt{2}, |z+1| < \sqrt{2}\}$. De rand van G bestaat uit twee cirkelbogen die elkaar treffen in twee punten i en $-i$ en daar een hoek van $\pi/2$ maken. [Dit hoeft u niet aan te tonen.]

(a) Geef een Möbiustransformatie f die G afbeeldt op een sector

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg z| < \alpha\}$$

voor zekere $\alpha > 0$. Bepaal α.

(b) Bepaal een conforme afbeelding van G naar de eenheidsschijf $D(0,1)$.

Vraag 5 Geldt de middelwaardestelling in het complexe vlak? Met andere woorden, is het volgende waar?

- *Zij Ω een gebied en $a, b \in \Omega$, $a \neq b$, zodanig dat*

$$[a,b] := \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\} \subset \Omega.$$

Als $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch is dan is er een $c \in [a,b]$ met

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Zo ja, geef een bewijs. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

Vraag 6 (a) Voor welke $\alpha \in \mathbb{R}$ is de oneigenlijke integraal

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^3}\, dx$$

convergent?

(b) Bereken de waarde van de integraal voor de waarden van α die u onder (a) gevonden heeft.

Vraag 7 Zij $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ en $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$. Zij $f : \mathbb{C}^+ \cup \,]-1,1[\, \to \mathbb{C}$ een continue functie waarvoor geldt dat de beperking van f tot $\mathbb{C}^+$ analytisch is.

(a) Welke van de volgende functies, die gedefinieerd zijn voor $z \in \mathbb{C}^-$ zijn analytisch op $\mathbb{C}^-$?

$$g_1(z) = f(\overline{z}), \qquad g_2(z) = \overline{f(\overline{z})}, \qquad g_3(z) = \overline{f(z)}.$$

Licht uw antwoord toe.

(b) Neem aan dat $f(x)$ reëel is voor elke $x \in \,]-1,1[$. Laat zien dat f een analytische voortzetting heeft tot $\mathbb{C} \setminus (\,]-\infty,-1] \cup [1,\infty[\,)$.

(c) **Bonusvraag** Neem aan dat $f(x)$ reëel is voor elke $x \in \,]-1,1[$ en dat bovendien geldt dat $\operatorname{Im} f(z) > 0$ voor alle $z \in \mathbb{C}^+$. Bewijs dat de beperking van f tot $]-1,1[$ strikt stijgend is.

Vraag 8 (a) Laat zien dat de functie

$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$

injectief is op het gebied $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ en bepaal het beeld van Ω onder f.

(b) Bepaal een Möbiustransformatie die $D(0,1) \setminus [\frac{1}{2},1[$ op $D(0,1) \setminus [0,1[$ afbeeldt.

(c) Vind een conforme afbeelding van $D(0,1) \setminus [\frac{1}{2},1[$ naar de eenheidsschijf $D(0,1)$.

Vraag 9 Zij Ω een enkelvoudig samenhangend gebied en γ een stuksgewijs gladde gesloten kromme in Ω met de eigenschap dat $n(\gamma,z)$ voor $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ enkel de waarde 0 of 1 oplevert.
Zij f meromorf op Ω en g analytisch op Ω. Neem aan dat f geen nulpunten en polen heeft op γ^*. Zij $G_1 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* \mid n(\gamma,z) = 1\}$. Neem aan dat $z_1,\ldots,z_k$ de nulpunten zijn van f in G_1 met respectievelijk multipliciteiten $m_1,\ldots,m_k$, en dat $w_1,\ldots,w_l$ de polen zijn van f in G_1 met respectievelijke ordes $n_1,\ldots,n_l$. Toon aan dat geldt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} g(z)dz = \sum_{i=1}^{k} m_i g(z_i) - \sum_{j=1}^{l} n_j g(w_j).$$

Vraag 10 Bespreek de functie $\frac{(z-1)^{1/2}}{(z+1)^{1/2}}$.

(a) Waar is deze functie gedefinieerd, en waar is ze analytisch?

(b) Bewijs dat deze functie een analytische voortzetting heeft tot $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$.

(c) Bereken $\int_{C(0,5)} \frac{(z-1)^{1/2}}{(z+1)^{1/2}} dz$.

(d) Wat is het beeldgebied?

Vraag 11 Zij $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ een niet-constante analytische functie. Bewijs

(a) Het reële deel van f is niet begrensd.

(b) Het beeld van f ligt dicht in $\mathbb{C}$.

Vraag 12 Bereken de integralen

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\, dx \quad \text{en} \quad \int_0^\infty \sin(x^2)\, dx$$

Hint: Integreer e^{iz^2} over een kromme bestaande uit $[0, R]$ (met $R > 0$), de cirkelboog $z = Re^{it}$, $t \in [0, \pi/4]$ en $[Re^{i\pi/4}, 0]$.

Vraag 13 Beschouw

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p(x^2+1)} .dx.$$

(a) Voor welke $p \in \mathbb{R}$ is deze oneigenlijke integraal convergent?

(b) Bereken de integraal voor die waarden die u onder (a) gevonden heeft.

Vraag 14 Beschouw

$$G = \mathbb{C} \setminus [0, \infty[.$$

(a) Geef een conforme afbeelding van G naar de eenheidsschijf $D(0, 1)$. Zorg er tevens voor dat i afgebeeld wordt op 0.

(b) Neem aan dat f een gehele functie is en dat $f(\mathbb{C}) \subset G$. Bewijs dat f constant is.

Vraag 15 (a) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ convergeert de hoofdwaarde-integraal

$$⨍_0^\infty \frac{t^{a-1}}{t-x} dt$$

waarin $x > 0$ vast is.

(b) Bereken de integraal uit (a).