Mogelijke vragen op examen "Bewijzen en redeneren"

Laatste wijziging: 8 december 2009

Vraag 1. (Examenvraag van juni 2008)

(a) Zoals bekend is $P(X)$ de machtsverzameling van X.

Een functie $f : P(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ noemen we een keuzefunctie als

$$\forall A \in P(X) \setminus \{\emptyset\} : f(A) \in A.$$

Als $|X| = n$, hoeveel elementen heeft dan $P(X) \setminus \{\emptyset\}$?

Hoeveel keuzefuncties zijn er als $|X| = 3$?

(b) Schrijf de bewering dat $f : X \to Y$ niet injectief is met behulp van kwantoren zonder de negatie $\neg$ te gebruiken. U mag $\neq$ wel gebruiken.

(c) Is de volgende bewering over een willekeurige functie $f : X \to Y$ waar of niet waar? Bewijs.

$$\left[\forall x \in X : \exists B \in P(Y) : x \notin f^{-1}(B)\right] \Rightarrow \left[\exists B \in P(Y) : \forall x \in X : x \notin f^{-1}(B)\right]$$

(d) Zijn de volgende verzamelingen aftelbaar of overaftelbaar?

- De verzameling $\mathbb{Q}$ van rationale getallen.
- De verzameling van alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ met ten hoogste 5 elementen.
- De verzameling van alle eindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$.

Licht uw antwoord toe. [Een formeel bewijs wordt niet gevraagd.]

Vraag 2. (Examenvraag van juni 2008) Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Bewijs dat

$$f(f^{-1}(B)) \subset B \tag{1}$$

geldt voor alle $B \in P(Y)$.

(b) Laat door middel van een tegenvoorbeeld zien dat gelijkheid in (1) niet hoeft te gelden.

(c) Bewijs dat

$$\forall B \in P(Y) : f(f^{-1}(B)) = B \tag{2}$$

als en slechts als f surjectief is.

Vraag 3. (a) Geef de definitie van convergentie van een rij (a_n) van reële getallen naar een limiet $L \in \mathbb{R}$.

(b) Bewijs vanuit de definitie dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + n}{n^3 - 5n^2} = 1.$$

Vraag 4. (Examenvraag van juni 2006) Zij X een verzameling. Met $\mathrm{Fun}(X, X)$ noteren we de verzameling van alle functies $f : X \to X$. Zij R de relatie op $\mathrm{Fun}(X, X)$ gedefinieerd door

$$(f, g) \in R$$

als en slechts als er een bijectie $\sigma : X \to X$ bestaat met

$$\sigma \circ f = g$$

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie op $\mathrm{Fun}(X, X)$ is.

[N.B.: Algemene eigenschappen van bijecties mag u gebruiken zonder bewijs.]

(b) Hoeveel equivalentieklassen van R zijn er als $|X| = 3$? Geef één element van elke equivalentieklasse.

Vraag 5. Zij A en B niet-lege deelverzamelingen van X.

Bewijs dat er een verzameling C bestaat met

$$(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C$$

als en slechts als $A = B$.

Vraag 6. Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Laat zien dat

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$

geldt voor elke $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$.

(b) Laat zien dat gelijkheid geldt voor elke $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$ als en slechts als f injectief is.

(c) Bewijs dat

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

geldt voor elke $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(Y)$. Wanneer geldt gelijkheid?

Vraag 7. Zij X een verzameling met $|X| \geq 3$ en $\mathrm{EquiRel}(X)$ de verzameling van alle equivalentierelaties op X.

We definiëren een ordening $\leq$ op $\mathrm{EquiRel}(X)$ door

$$R \leq S \quad \Leftrightarrow \quad R \subset S.$$

U hoeft niet te laten zien dat dit inderdaad een ordening is.

(a) Bewijs dat de ordening niet totaal is.

(b) Laat zien dat $\mathrm{EquiRel}(X)$ een kleinste en een grootste element heeft.

(c) Hoeveel elementen heeft $\mathrm{EquiRel}(X)$ als $|X| = 3$?

Vraag 8. Neem aan dat R een relatie is op de verzameling X. Bewijs dat R een equivalentierelatie is als en slechts als aan de volgende drie eigenschappen voldaan is.

(i) R is reflexief,

(ii) $R \circ R = R$, en

(iii) $R = R^{-1}$.

Vraag 9. De rij (a_n) wordt gegeven door $a_0 = 3$ en

$$a_n = 3 - \frac{2}{a_{n-1}}, \qquad \text{voor } n \geq 1.$$

(a) Gebruik volledige inductie om te laten zien dat $a_n \geq 2$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

(b) Bewijs dat de rij strikt dalend is.

(c) Bewijs dat de rij convergent is en bereken de limiet. Formuleer de stelling die u gebruikt om te concluderen dat de rij convergent is.

Vraag 10. Zij $(A_n)_n$ een rij van deelverzamelingen van een verzameling X. We definiëren

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_n \right) \quad \text{en} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n \right)$$

(a) Bewijs dat

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \liminf_{n\to\infty} A_n$$

(b) Neem aan dat A en B deelverzamelingen zijn van X met $A \subset B$. Geef een voorbeeld van een rij (A_n) waarvoor geldt dat

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = A$$

en

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = B.$$

Vraag 11. Zoals bekend is een reële rij (a_n) convergent als

$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \ |a_n - L| < \varepsilon. \tag{3}$$

Het is ook bekend dat een bewering in het algemeen van betekenis verandert als we kwantoren van volgorde verwisselen.

(a) Neem aan dat i.p.v. (3) gegeven is dat

$$\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \exists L \in \mathbb{R} : \forall n \geq n_0 : \ |a_n - L| < \varepsilon.$$

Volgt hieruit dat de rij (a_n) convergent is? Zo ja, geef een bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

(b) Dezelfde vraag als gegeven is dat (a_n) voldoet aan

$$\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \exists L \in \mathbb{R} : \ |a_n - L| < \varepsilon.$$