Examen Numerieke Wiskunde

14 juni 2019, 8:00

Dit document is natuurlijk een herschrijving van de vragen uit mijn geheugen en het geheugen van mijn collega-studenten. Waar ik echter andere toevoegingen heb gemaakt heb ik deze in *cursief* genoteerd.

Dit jaar was het examen uitzonderlijk volledig schriftelijk, aangezien de prof ziek was en dit ook al ruim op voorhand geweten was. Het examen is dus opgesteld als schriftelijk examen en niet als examen waar nog een mondelinge toelichting bijhoort.

Vraag 1

Waar of niet waar? Geef voldoende uitleg

- De interpolerende veelterm van $n + 1$ meetpunten is altijd van strikte graad n.
- Gegeven $Ax = b$ een lineair stelsel. We berekenen met een niet nader bepaald algoritme de oplossing $\overline{x}$ van dit stelsel. De residuvector $r = A\overline{x} - b$ van dit stelsel is zodanig dat $\frac{\|r\|}{\|b\|}$ van de grootteorde van ϵ_{mach} is. Dit impliceert dat $\frac{\|\overline{x}-x\|}{\|x\|}$ ook van deze grootteorde is. *(Tip: boek p. 72, sectie* 3.10.4*)*
- De convergentiefactor van de methode van de inverse machten wordt bepaald door de spectraalradius van de matrix.

Vraag 2

We berekenen de functie

$$f(x) = x^3 - x^2 = (x^3 + 1) - (x^2 + 1)$$

op twee manieren (de twee schrijfwijzen die hier dus gegeven zijn).

1. Bespreek de conditie van dit probleem voor willekeurige x.
2. Bespreek de stabiliteit van de twee methodes voor willekeurige x.
3. Hoeveel beduidende cijfers verwacht je te verliezen als je de functie uitrekent rond $x = 0.000001$ met beide methodes?

Vraag 3

Een bedrijf maakt balken met een bepaalde dikte. Deze dikte varieert tussen twee waarden, D_{min} en D_{max}. Deze variaties zorgen voor kleine variaties in andere eigenschappen, zoals de kleinste eigenfrequentie. We willen de gemiddelde kleinste eigenfrequentie weten van alle balken. De eigenfrequentie van een balk wordt bepaald als de grootste eigenwaarde (λ_{max} van een matrix $A(D)$ die afhangt van de dikte D van de balk. We gebruiken de volgende formule:

$$\omega_{gem} = \frac{\int_{D_{min}}^{D_{max}} \lambda_{max}(A(D))\, dD}{D_{max} - D_{min}}$$

Welke methodes zou je gebruiken om dit uit te rekenen? Geef voor elke formule een motivatie en indien het een iteratieve methode is ook de iteratieformule. Schrijf voor elke methode niet meer dan 3 regels.

Vraag 4

Gegeven de functie:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

We berekenen de nulpunten van deze functie met de methode van Newton-Raphson.

1. Geef de substitutieformule $F(x)$.
2. Zijn er vaste punten? Zo ja, bepaal ze allemaal.
3. Bepaal voor alle vaste punten of er lokale convergentie is, zo ja, wat is de convergentieorde en bijbehorende convergentiefactor? Komt dit overeen met wat je theoretisch verwacht van de methode van Newton-Raphson? *(De intentie was duidelijk dat je met behulp van andere methodes de convergentieorde en -factor afleidt en berekent in plaats*

van deze gewoon uit het boek af te lezen, en dan ondervindt dat de gegeven ordes en factor in het boek kloppen.)

4. Wanneer convergeert deze formule en wanneer niet? Toon grafisch aan door de convergentie te tekenen voor een aantal karakteristieke beginwaarden. *(Tip: De* TI-84+ *kan het convergentieproces visualiseren. Gebruik de* SEQ*-modus en zet dan bij* FORMAT *de eerste regel op* WEB *ipv* TIME*)*

Vraag 5

We willen de afgeleide van de functie $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2}$ berekenen in $x = 1$. We gebruiken hiervoor de differentiatieformule $\frac{f(x)-f(x+h)}{h}$ voor dalende h.

Gegeven zijn twee grafieken:

- *Eén van de gevonden waarde in functie van h, die convergeert naar* 0.3 *maar op het einde steeds heviger begint te oscilleren.*
- *Eén van de relatieve fout op de gevonden waarde. Dit is een log-loggrafiek. We zien de relatieve fout dalen langs een rechte met richtingscoëfficiënt ongeveer* 1 *tot de fout ongeveer* 10^{-8} *is. Daarna stijgt de relatieve fout weer op een niet-egale wijze.*

1. Beschrijf wat er gebeurt. *Dus waarom de fout weer begint te stijgen enz.*
2. Wat is de initiële convergentieorde?
3. Wat is de bijbehorende convergentiefactor?
4. Kan je dit analytisch onderbouwen?

Ik ben vooralsnog niemand tegengekomen die deze vraag met zekerheid had beantwoord.