Beschouw de Hamiltoniaan

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 + \lambda H_1$$

met $\lambda H_1 = \frac{1}{2}\lambda m\omega^2 X^2$ een (triviale) storing ; $\lambda \ll 1$.

Voor dit probleem worden de eerste- en tweede-orde correcties op de energieniveaus berekend in het handboek (zie pag. 181, 471). De resultaten zijn

$$\Delta E_n^{(1)} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \frac{\lambda}{2}$$

$$\Delta E_n^{(2)} = -\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega . \frac{\lambda^2}{8}$$

wat overeenstemt met de expansie in λ van het exacte resultaat voor de eigenwaarden van H,

$$W_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega\sqrt{1+\lambda}$$

aangezien $\sqrt{1+\lambda} = 1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{8} + \ldots$

In hetgeen volgt bepalen we de eerste-orde correcties op de eigenfuncties en we toetsen deze af aan het exacte resultaat.

We hebben $|\psi_n\rangle = |\psi_n^0\rangle + \lambda|\psi_n^1\rangle + \cdots$; $|\psi_n^0\rangle = |n\rangle$

met $$|\psi_n^1\rangle = \sum_{k\neq n} \frac{\langle k|H_1|n\rangle}{E_n - E_k}|k\rangle$$

We gebruiken nu (zie pag. 471) de resultaten

$$\langle n+2|X^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\sqrt{(n+1)(n+2)}$$

$$\langle n-2|X^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\sqrt{n(n-1)}$$

$$E_{n+2} - E_n = 2\hbar\omega$$

Dit geeft, voor alle $n \geq 0$,

$$|\psi_n^1\rangle = \frac{1}{8}\sqrt{n(n-1)}\;|n-2\rangle - \frac{1}{8}\sqrt{(n+1)(n+2)}\;|n+2\rangle$$

Merk hierbij op dat de onbestaande kets $|-1\rangle$ en $|-2\rangle$ niet voorkomen omdat hun amplitude nul is.

Stemt dit resultaat overeen met de expansie van de exacte oplossing? De exacte oplossing kunnen we schrijven als (zie pag. 68, vgl. (4.16))

$$\langle \vec{r}|n\rangle = \psi_n^{(0)}(x) = \frac{A_n}{\sqrt{\ell}}F_n\left(\frac{x}{\ell}\right), \text{ met } \ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

voor $\lambda = 0$ (zonder storing). Voor $\lambda \neq 0$ hebben we

$$\omega \to \omega\sqrt{1+\lambda}$$

$$\ell \to \ell(1+\lambda)^{-1/4}$$, zodat de exacte golffunctie

wordt: $$\psi_n^{(\lambda)}(x) = \frac{A_n}{\sqrt{\ell}}(1+\lambda)^{1/8}F_n\left(\frac{x}{\ell}(1+\lambda)^{1/4}\right)$$

$$= \frac{A_n}{\sqrt{\ell}}\left(1+\frac{\lambda}{8}+\dots\right)F_n\left(\frac{x+\lambda x/4+\dots}{\ell}\right)$$

$$= \frac{A_n}{\sqrt{\ell}}\,F_n\left(\frac{x}{\ell}\right)\left(1+\frac{\lambda}{8}\right) + \frac{dF_n}{dx}\left(\frac{x}{\ell}\right)\cdot\frac{\lambda x}{4} + O(\lambda^2)$$

Nu maken we gebruik van (4.19)

$$= \psi_n^{(0)}(x) + \frac{\lambda}{8}\psi_n^{(0)}(x) + \left\{\frac{\sqrt{n/2}}{l}\psi_{n-1}^{(0)}(x) - \frac{\sqrt{(n+1)/2}}{l}\psi_{n+1}^{(0)}(x)\right\}\frac{\lambda . x}{4}$$

$$+ O(\lambda^2)$$

en nu gebruiken we (4.18)

$$= \psi_n^{(0)}(x) + \frac{\lambda}{8}\psi_n^{(0)}(x) + \frac{\lambda}{4}\left\{\frac{\sqrt{n/2}}{l}\frac{l}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{n}\,\psi_n^{(0)}(x) + \sqrt{n-1}\,\psi_{n-2}^{(0)}(x)\right]\right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{(n+1)/2}}{l}\frac{l}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{n+2}\,\psi_{n+2}^{(0)}(x) + \sqrt{n+1}\,\psi_n^{(0)}(x)\right]\right\}$$

$$+ O(\lambda^2)$$

$$= \psi_n^{(0)}(x) + \frac{\lambda}{8}\psi_n^{(0)}(x) + \frac{\lambda}{8}\left\{n\,\psi_n^{(0)}(x) - (n+1)\psi_n^{(0)}(x)\right.$$

$$\left. + \sqrt{n(n-1)}\,\psi_{n-2}^{(0)}(x) - \sqrt{(n+1)(n+2)}\,\psi_{n+2}^{(0)}(x)\right\}$$

$$+ O(\lambda^2)$$

Merk op dat de termen in $\lambda\psi_n^{(0)}(x)$ wegvallen, zodat inderdaad geldt $\langle\psi_n^{(0)}|\psi_n^{(1)}\rangle = 0$, en dat er overeenstemming is met de resultaten van de storingsrekening tot 1ste orde in λ.