Differentiaalvergelijkingen : oefeningenexamen 2

Partiële differentiaalvergelijkingen

17 december 2014

1 Men beschouwt de afbeelding X, met als domein $\mathcal{V} = \{f : [0, 2L] \to \mathbb{C} | f \textit{ is éénmaal continu differentieerbaar}\}$, die wordt gegeven door

$$(Xf)(x) = \begin{cases} -if'(x) & \text{voor } 0 < \text{x} < \text{L} \\ -2if'(x) & \text{voor L} < \text{x} < 2\text{L} \end{cases}$$

Verder bepalen we ook randvoorwaarden die $\lim_{x \downarrow 0} f(x)$ verbindt met $\lim_{x \uparrow 2L} f(x)$ en die $\lim_{x \uparrow L} f(x)$ verbindt met $\lim_{x \downarrow L} f(x)$.

1) Zoek de randvoorwaarden die nodig zijn opdat X uitgerust met het volgende scalair product symmetrisch zou zijn.

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \int_0^{2L} \overline{g_1(x)} g_2(x) dx$$

2) Teken een voorbeeldfunctie uit $\mathcal{V}$ dat niet een triviale functie is (zoals $f = 0$).

3) Vind de eigenwaarden en de eigenfuncties van de afbeelding X (onder de veronderstelling dat aan de randvoorwaarden van 1) voldaan is).

2 Men wil het volgende probleem gaan oplossen, waarin $f : [0, L] \to \mathbb{R}^+$ en $g : [0, L] \to \mathbb{R}^+$ voldoende continu differentieerbare functies zijn.

i) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x)$ waarbij $0 < x < L$

ii) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0$

iii) $u(0, x) = f(x)$

1) Beschrijf in woorden wat het probleem hierboven voorstelt.

2) Beschrijf het gedrag van $u(t, x)$ als $t \to \infty$.

3) Vind een particuliere oplossing van het probleem, wetende dat deze oplossing 0 wordt als g naar 0 gaat.

4) Beschrijf in woorden hoe je verder te werk gaat om een algemene oplossing te vinden (u moet niets berekenen).