Proeftoets Algemene natuurkunde 1 oplossing

Vraag 1 (2 ptn)

1. Onderstel dat $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ drie algemene vectoren in 3D zijn, dus geen speciale relaties zoals loodrechte stand of in eenzelfde vlak liggen … Argumenteer dat $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ in het $(\vec{b}, \vec{c})$-vlak ligt.

2. Geef nu een argument waarom in het algemeen

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \,.$$

Oplossing

1. De vector $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ staat zeker loodrecht op $\vec{b} \times \vec{c}$, maar deze laatste staat loodrecht op het $(\vec{b}, \vec{c})$-vlak. Dit wil dus zeggen dat $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ in het $(\vec{b}, \vec{c})$-vlak ligt.

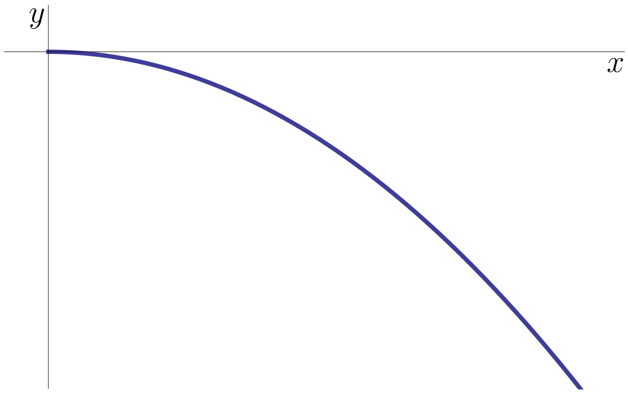
2. Een heel zelfde argument als hierboven toont aan dat $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ in het $(\vec{a}, \vec{b})$-vlak ligt wat voor algemene keuzen van $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ niet samenvalt met het $(\vec{b}, \vec{c})$-vlak. De doorsnede van beide vlakken bestaat uit de veelvouden van $\vec{b}$ maar voor algemene vectoren is zeker $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ niet evenredig met $\vec{b}$, kies bijvoorbeeld $\vec{a} = \vec{b} = \hat{\mathbf{i}}$ en $\vec{c} = \hat{\mathbf{j}}$.

Vraag 2 (3 ptn)

Een deeltje voert voor $t > 0$ de projectielbaan

$$\vec{r}(t) = v_0 t\,\hat{\mathbf{i}} - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2\,\hat{\mathbf{j}}$$

uit, met de x- en y-assen zoals in de figuur.



Figuur 1: Een deeltje dat een projectielbaan uitvoert

1. Bepaal de vectoriële snelheid en de baansnelheid van het deeltje op tijdstip t.
2. Bepaal op tijdstip t de tangentiële en normale componenten van de versnelling van het deeltje.

Oplossing

1. De vectoriële snelheid van het deeltje is de afgeleide van de positie naar de tijd:
$$\vec{v}(t) = v_0\,\hat{\mathbf{i}} - g\,t\,\hat{\mathbf{j}}\,.$$
De baansnelheid van het deeltje is de grootte van de vectoriële snelheid:
$$v(t) = \sqrt{\vec{v}(t)\cdot\vec{v}(t)} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}\,.$$

2. De versnelling van het deeltje is constant en gegeven door $\vec{a} = -g\,\hat{\mathbf{j}}$. De tangentiële component $a_\parallel$ van de versnelling is de projectie op de snelheidseenheidsvector:

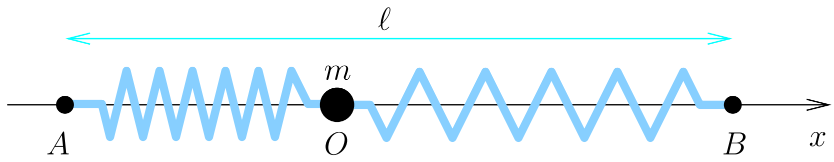
$$a_\parallel = \vec{a} \cdot \hat{\mathbf{v}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}(t)}{v(t)} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} \,.$$

De normale component $a_\perp$ van de versnelling kan je vinden door te gebruiken dat $a^2 = a_\parallel^2 + a_\perp^2$. Dit wordt

$$a_\perp = \sqrt{g^2 - \frac{g^4 t^2}{v_0^2 + g^2 t^2}} = \frac{g\, v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} \,.$$

Vraag 3 (5 ptn)

Een puntmassa m beweegt wrijvingsloos over een horizontale baan, de x-as, en is aan twee ideale veren verbonden zoals in de figuur. De linkerveer heeft een rustlengte ℓ_A en een veerconstante k_A. Het linker uiteinde van de veer is aan een vast punt A met coördinaat $-a$ verbonden en het rechter uiteinde aan m. De rechter veer is aan een vast punt B met coördinaat b verbonden en heeft rustlengte ℓ_B en veerconstante k_B.



Figuur 2: De massa m in evenwicht

1. Waar moet je de punten A en B op de x-as plaatsen opdat m in de oorsprong in evenwicht zou zijn als je weet dat de afstand tussen A en B gelijk is aan ℓ?

2. Schrijf de netto kracht op die m ondervindt wanneer de massa zich in het punt x bevindt.

De puntmassa m oscilleert wanneer ze uit evenwicht gebracht wordt en voert een beweging uit van de vorm

$$t \mapsto x(t) = A\cos(\omega t - \varphi)\,.$$

Hierbij zijn A en ω positief en is $0 \leq \varphi < 2\pi$.

3. Bepaal de dimensies van A, ω en φ.

4. Bepaal A, ω en φ als je weet dat $x(0) = 0$ en $v(0) = v_0 > 0$.

5. Bepaal, als functie van de tijd, de kracht die de linker veer uitoefent op het bevestigingspunt A.

Oplossing

1. De massa m is in evenwicht wanneer de kracht van de linker veer precies deze van de rechter veer opheft. Als de oorsprong het evenwichtspunt is dan vinden we de voorwaarde

$$k_A(a - \ell_A) = k_B(b - \ell_B)\,.$$

Verder weten we dat $a + b = \ell$. We kunnen a en b bepalen door dit stelsel vergelijkingen op te lossen:

$$a = \frac{k_A\ell_A + k_B(\ell - \ell_B)}{k_A + k_B} \;\text{ en }\; b = \frac{k_A(\ell - \ell_A) + k_B\ell_B)}{k_A + k_B}\,.$$

2. De netto kracht $\vec{F}$ die op m werkt als m zich in x bevindt is de som van de terugroepkrachten van beide veren. Met $\hat{\mathbf{i}}$ de eenheidsvector volgens de positieve x-as wordt dit

$$\vec{F} = -k_A(a + x - \ell_A)\hat{\mathbf{i}} + k_B(b - x - \ell_B)\hat{\mathbf{i}}\,.$$

Nu gebruiken we de evenwichtsvoorwaarde die we in het eerste puntje vonden en krijgen zo

$$\vec{F} = -(k_A + k_B)\hat{\mathbf{i}}\,.$$

Dit is een harmonische terugroepkracht met constante $k_A + k_B$.

3. Het argument van een cosinus-functie moet dimensieloos zijn, daarom is

$$[\varphi] = 1 \;\text{ en }\; [\omega t] = [\omega]T = 1\,.$$

We vinden dus dat $[\omega] = T^{-1}$. Verder is de waarde van de cosinus ook dimensieloos en dus moet $[A] = L$ want de positie heeft dimensie L.

4. Invullen van de voorgestelde oplossing in de tweede vergelijking van Newton leidt tot

$$m\,a = -m\,\omega^2\,A\cos(\omega t - \varphi) = F = -(k_A + k_B)\,A\cos(\omega t - \varphi)\,.$$

Daarom is

$$\omega = \sqrt{\frac{k_A + k_B}{m}}\,.$$

Omdat $x(0) = 0$ weten we dat ofwel $\varphi = \pi/2$ ofwel $\varphi = 3\pi/2$, omdat $v(0) = v_0$ hebben we ook dat $v_0 = \omega\, A \sin(\varphi)$. Dit kan alleen als

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ en } A = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0\sqrt{m}}{\sqrt{k_A + k_B}}\,.$$

5. Omdat de veren ideaal zijn, is de kracht $\overrightarrow{F_A}$ die de linker veer op het bevestiginspunt A uitoefent precies gelijk aan het tegengestelde van de terugroepkracht die de linkerveer op m uitoefent:

$$\overrightarrow{F_A} = k_A(a + x - \ell_A)\hat{\mathbf{i}} = k_A(a - \ell_A + A\cos(\omega t - \varphi))\hat{\mathbf{i}}$$

waarbij je de hierboven gevonden waarden voor A, ω en φ eventueel nog kan invullen.