Bewijzen en Redeneren
LaTeX opdracht 2012

- Werk de volgende opdracht individueel uit. U moet hier alleen aan werken. Geef ook geen files door aan anderen. Ingediende opdrachten die te zeer op elkaar lijken worden met 0 beoordeeld.
- Maak een LaTeX file en noem ze `Achternaam-Voornaam.tex` met uw achternaam aaneengeschreven. Deze naamgeving is verplicht.
- Deze opdracht telt mee voor 2 punten op 20 bij de bepaling van het eindcijfer voor Bewijzen en Redeneren. Zowel het correct en verzorgd gebruik van LaTeX wordt beoordeeld als het correct en verzorgd opschrijven van de wiskunde in volledige goed-lopende zinnen.
- Vraag 4 is een **bonusvraag**, waarmee u 1 extra punt kunt verdienen.
- Let bij het gebruik van LaTeX zeker op de volgende punten. Hiermee zullen we bij de quotering rekening houden.
  - Maak de kop van uw document met `\title` en `\author`. Vermeld bij `\author` ook uw studentennummer.
  - Voorzie een aantal gecentreerde formules van een nummer. Zorg er voor dat er tenminste één keer naar een formule terugverwezen wordt. Gebuik de LaTeX commando's `\label` en `\ref`.
  - Maak een referentielijst waarin u de literatuur vermeldt die u gebruikt. Als u een bewijs van iemand anders volgt, vermeld dat dan en neem de referentie op in de lijst van referenties. Verwijs naar de referenties met het commando `\cite`.
- Stuur uw `.tex` bestand en het bijbehorende `.pdf` bestand naar
  Prof. Arno Kuijlaars (`arno.kuijlaars@wis.kuleuven.be`)
  en naar de monitor
  Dr. Marie Sabbe (`marie.sabbe@wis.kuleuven.be`).
- De deadline voor deze opdracht is zaterdag 1 december 2012 om 24 uur.
- Veel succes!

1 Cauchy

Augustin-Louis Cauchy is één van de belangrijkste wiskundigen uit de eerste helft van de negentiende eeuw.

Geef een korte beschrijving van het leven en werk van Cauchy. Informatie hierover is te vinden in boeken en op het internet (bv. Wikipedia). Gebruik minstens twee onafhankelijke bronnen en geef referenties naar de bronnen die je gebruikt.

Zorg ervoor dat je beschrijving niet meer dan 30 regels bedraagt.

2 De ongelijkheid van Cauchy-Schwarz

De ongelijkheid van Cauchy-Schwarz zegt dat voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ en voor alle mogelijke reële getallen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ geldt

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right).$$

Omdat dit een bewering is die geldig is voor alle $n \in \mathbb{N}_0$, is volledige inductie een mogelijke bewijsmethode. Probeer het eerst zelf met volledige inductie te bewijzen. Als dat lukt, dan kun je dat bewijs geven.

Als het niet lukt, bestudeer dan het bewijs dat staat op de website

`http://www.articlesbase.com/online-education-articles/cauchy-inequality-proof-by-induction-3226963.html`

Let op dat het idee van het bewijs juist is, maar dat er een fout zit in de uitwerking er van!

Formuleer de stelling van Cauchy-Schwarz als een stelling en geef een correct bewijs in eigen bewoordingen. Als je het bewijs volgt van de genoemde website, geef dan niet alle motiverende achtergrond die er ook in staat, maar beperk je tot het bewijs.

Geef een referentie naar de website (als u die gebruikt).

3 Cauchy-inductie

Er is een variant van volledige inductie die genoemd is naar Cauchy. Deze zogenaamde Cauchy-inductie is gebaseerd op de volgende eigenschap.

Stelling 1 *Neem aan dat $P(n)$ een bewering is die afhangt van $n \in \mathbb{N}_0$. Veronderstel dat geldt*

(1) *$P(1)$ is juist,*

(2) *voor elke $k \in \mathbb{N}_0$ geldt $P(k) \Rightarrow P(2k)$,*

(3) *voor elke $k \in \mathbb{N}_0$ met $k \geq 2$ geldt $P(k) \Rightarrow P(k-1)$.*

Dan is de bewering $P(n)$ waar voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

Formuleer dit in uw verslag en leg uit waarom deze variant van volledige inductie juist is.

4 Meetkundig/rekenkundig gemiddelde (bonusvraag)

Gebruik Cauchy inductie om te bewijzen dat voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ en voor alle positieve getallen $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ geldt

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Dit is de ongelijkheid tussen het **meetkundig gemiddelde** en het **rekenkundig gemiddelde** van n positive reële getallen. Formuleer dit als een stelling en geef het bewijs.

Een bewijs kunt u vinden op de website

`http://www.artofproblemsolving.com/Wiki/index.php/Cauchy_Induction`

De manier waarop het bewijs daar opgeschreven is, is echter voor ons **niet acceptabel**. Er moet verbindende tekst staan tussen opeenvolgende formules. Een opsomming van een aantal ongelijkheden achter elkaar is niet toegestaan. Ook het gebruik van $\Rightarrow$ in de betekenis van "daaruit volgt" is een fout. Geef ook daar steeds verbindende tekst.