Oplossingen proefexamen Thermodynamica, april 2016

1 Uitzetting

a) Zoals we weten is $Q_{k\to w} + Q_{w\to k} = 0$, zodat $m_k c_k(T_h - T_f) = m_w c_w(T_f - T_h)$, of ook

$$T_f = \frac{m_k c_k T_h + m_w c_w T_f}{m_k c_k + m_w c_w} \approx 347 \text{ K}. \tag{1.1}$$

b)We berekenen

$$\beta = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T} \quad \Rightarrow \quad V_f = V_0 e^{\beta\Delta T} \approx V_0 e^{3\alpha\Delta T} \approx 0.619 \text{ dm}^3 \tag{1.2}$$

2 Harmonische oscillator

a) $P_0 = P_{atm} + \frac{mg}{A}$.
b) Het proces is adiabatisch, en dus geldt $PV^\gamma = cte$. Dit wil zeggen dat

$$\begin{aligned}
P_0 V_0^\gamma =& (P_0 + \Delta P)(V_0 + \Delta V)^\gamma && (2.1)\\
=& (P_0 + \Delta P)V_0^\gamma \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right)^\gamma && (2.2)\\
\approx& (P_0 + \Delta P)V_0^\gamma \left(1 + \gamma\frac{\Delta V}{V_0}\right) && (2.3)\\
\approx& P_0 V_0^\gamma + V_0^\gamma \Delta P + \gamma P_0 V_0^{\gamma-1}\Delta V. && (2.4)
\end{aligned}$$

Dus zien we dat

$$V_0^\gamma \Delta P + \gamma P_0 V_0^{\gamma-1}\Delta V = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta P}{P_0} + \gamma\frac{\Delta V}{V_0} = 0. \tag{2.5}$$

c) De kracht F die het gewicht naar boven zal duwen is gelijk aan $F = A\Delta P$, en met het vorige vinden we dat

$$F = A\Delta P = -\frac{A\gamma P_0}{V_0}\Delta V = -\frac{A^2\gamma P_0}{V_0}x \equiv -kx, \tag{2.6}$$

waarbij x de verplaatsing naar beneden ten opzichte van de evenwichtspositie aangeeft. Het systeem gedraagt zich dus inderdaad zoals een harmonische oscillator. Voor zo'n systeem is de frequentie gelijk aan

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{A^2\gamma P_0}{mV_0}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{A^2\gamma\left(P_{atm} + \frac{mg}{A}\right)}{mV_0}}. \tag{2.7}$$

3 IJs smelten

De verandering in entropie kan men als volgt uitrekenen:

$$\Delta S = \frac{mL}{T} \approx 1.22 \cdot 10^4 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}. \tag{3.1}$$

De verandering in enthalpie is:

$$\Delta H = \Delta E + P\Delta V = Q = 3.33 \cdot 10^6 \mathrm{J}. \tag{3.2}$$

Voor de Gibbs vrije energie hebben we:

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S = 0. \tag{3.3}$$

4 Mengsels

Zie het einde van het eerste deel van de cursus.

5 Faseovergangen bij zwarte gaten

a) De oppervlakte is gegeven door

$$\begin{aligned} A &= 4\pi R^2 && (5.1)\\ &= \pi\left(r_s + \sqrt{r_s^2 - 4r_q^2}\right)^2 && (5.2)\\ &= \pi\left(\frac{2GM}{c^2} + \sqrt{\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 - \frac{q^2G}{\pi\varepsilon_0 c^4}}\right)^2 && (5.3)\\ &= \pi\left(\frac{2GE}{c^4} + \sqrt{\left(\frac{2GE}{c^4}\right)^2 - \frac{q^2G}{\pi\varepsilon_0 c^4}}\right)^2 && (5.4)\\ &= \frac{4\pi G^2}{c^8}\left(E + \sqrt{E^2 - \frac{q^2c^4}{4\pi\varepsilon_0 G}}\right)^2 && (5.5)\\ &= \frac{4\pi G^2}{c^8}\left(E + \sqrt{E^2 - Q^2}\right)^2 . && (5.6) \end{aligned}$$

Dus vinden we

$$S_{BH} = \frac{\pi k_B G}{\hbar c^5}\left(E + \sqrt{E^2 - Q^2}\right)^2 . \tag{5.7}$$

$$\tag{5.8}$$

b) Als we $\Delta \equiv \sqrt{E^2 - Q^2}$ definiëren, dan hebben we dat

$$\frac{\partial \Delta}{\partial E} = \frac{E}{\Delta} . \tag{5.9}$$

Hiermee kunnen we het volgende uitrekenen:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial E}\left[\lambda\left(E+\Delta\right)^2\right] \tag{5.10}$$

$$= 2\lambda(E+\Delta)\left(1+\frac{E}{\Delta}\right) \tag{5.11}$$

$$= 2\lambda\frac{(E+\Delta)^2}{\Delta} \ . \tag{5.12}$$

Dus

$$T = \frac{\sqrt{E^2-Q^2}}{2\lambda\left(E+\sqrt{E^2-Q^2}\right)^2} \ . \tag{5.13}$$

c) We rekenen verder uit:

$$\frac{\partial T}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial E}\left[\frac{\Delta}{2\lambda\left(E+\Delta\right)^2}\right] \tag{5.14}$$

$$= \frac{1}{2\lambda}\frac{\frac{E}{\Delta}\cdot(E+\Delta)^2 - 2\Delta(E+\Delta)\left(1+\frac{E}{\Delta}\right)}{(E+\Delta)^4} \tag{5.15}$$

$$= \frac{1}{2\lambda}\frac{\frac{E}{\Delta}-2}{(E+\Delta)^2} \tag{5.16}$$

$$= \frac{1}{2\lambda}\frac{E-2\Delta}{\Delta(E+\Delta)^2} \ . \tag{5.17}$$

Hiermee hebben we dat

$$C_{BH} = \frac{\partial E}{\partial T} = \left(\frac{\partial T}{\partial E}\right)^{-1} = \frac{2\lambda\Delta(E+\Delta)^2}{E-2\Delta} \tag{5.18}$$

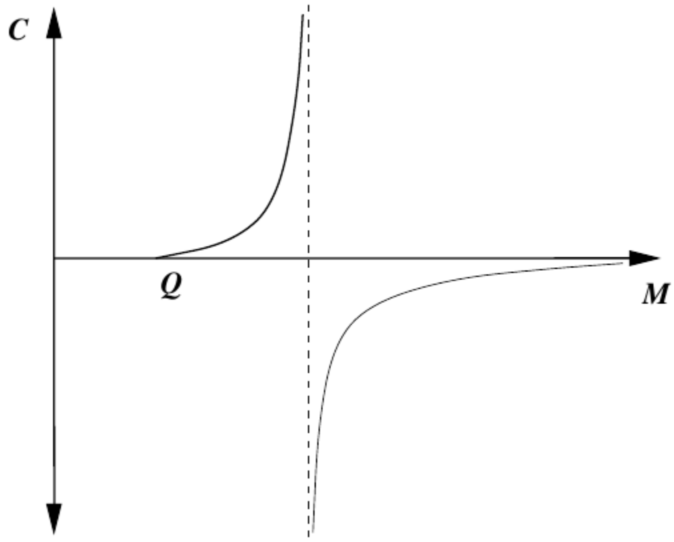
$$= 2\lambda\frac{\sqrt{E^2-Q^2}\left(E+\sqrt{E^2-Q^2}\right)^2}{E-2\sqrt{E^2-Q^2}} \ . \tag{5.19}$$

$$\tag{5.20}$$

d) C_{BH} zal divergeren wanneer $E_c - 2\sqrt{E_c^2-Q^2} = 0$. Dus

$$E_c = \frac{2Q}{\sqrt{3}} \ . \tag{5.21}$$

Men ziet dan dat $C_{BH} < 0$ als $E > E_c$ en $C_{BH} > 0$ als $E < E_c$. Concreet ziet C_{BH} er als volgt uit:



e) Met het resultaat van deel c), en door $Q^2 = 3E_c/4$ te stellen, vinden we dat

$$T_c = \frac{1}{9\lambda E_c} = \frac{\hbar c^3}{9\pi k_B G M_c} \ , \tag{5.22}$$

zo dat

$$T_c \approx 5.47 \cdot 10^{-8}\mathrm{K} \ . \tag{5.23}$$