Tussentijdse Toets Bewijzen en Redeneren

1ste fase Fysica en Wiskunde
maandag 31 oktober 2016, 16:30–18:00 uur

Fysica: auditorium 200M.00.07
Wiskunde: auditorium 200C Aud A

Naam:

Studierichting:

Naam van assistent:

(Assistenten zijn Marco Stevens, Dries Stivigny en Jonas Wahl)

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- De toets bestaat uit 3 vragen. Begin het antwoord op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Puntenverdeling per vraag:

Vraag 1:	6 pt			
Vraag 2:	(a) 4 pt	(b) 2 pt	(c) 6 pt	
Vraag 3:	(a) 3 pt	(b) 3 pt	(c) 3 pt	(d) 3 pt

- Als u de toets voldoende maakt, behaalt u een bonus voor het examen van Bewijzen en redeneren:
  - Bij 15 op 30: 1 punt bonus
  - Bij 20 op 30: 1,5 punt bonus
  - Bij 25 op 30: 2 punten bonus
- Succes!

Naam:

Vraag 1 Geef de ontkenning van de volgende bewering over een rij (a_n) van reële getallen

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} : [\varepsilon > 0 \implies \forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : [m > n \wedge a_n < 1 + \varepsilon]] .$$

Schrijf de ontkenning in een vorm waarbij $\neg$ en $\implies$ niet voorkomen.

Antwoord: De ontkenning is

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R} : [\varepsilon > 0 \wedge \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : [m \leq n \vee a_n \geq 1 + \varepsilon]] .$$

Naam:

Vraag 2 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Bewijs dat voor elke $A \in P(X)$ geldt

$$A \subset f^{-1}(f(A))$$

(b) Laat door middel van een voorbeeld zien dat de andere inclusie

$$f^{-1}(f(A)) \subset A$$

niet altijd hoeft te gelden.

(c) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : \quad f^{-1}(f(A)) = A$$

geldt als en slechts als f injectief is.

Antwoord:

(a) Neem $x \in A$ willekeurig. Dan is $f(x) \in f(A)$. Vanwege de definitie van invers beeld is dan $x \in f^{-1}(f(A))$.

Omdat $x \in A$ willekeurig gekozen was, is hiermee de inclusie $A \subset f^{-1}(f(A))$ bewezen.

(b) We moeten een functie nemen die niet injectief is.

Een voorbeeld is $X = \{0, 1\}$, $Y = \{a\}$ en $f : X \to Y$ met $f(0) = f(1) = a$. We nemen $A = \{0\}$. Dit is een deelverzameling van X en er geldt $f(A) = \{a\}$. Het invers beeld van $f(A)$ bevat ook 1. Er geldt

$$f^{-1}(f(A)) = \{0, 1\}$$

en het is duidelijk dat dit geen deelverzameling is van $A = \{0\}$.

Dit is dus een voorbeeld waarbij $f^{-1}(f(A)) \subset A$ niet geldt.

(c) We moeten een equivalentie bewijzen en we doen dit door twee implicaties te bewijzen.

Bewijs van: $\forall A \in P(X) : f^{-1}(f(A)) = A \implies f$ is injectief.

We nemen dus aan dat $\forall A \in P(X) : f^{-1}(f(A)) = A$ juist is en we gaan bewijzen dat f injectief is.

Neem aan dat $x_1, x_2 \in X$ met $f(x_1) = f(x_2)$. We hebben aangenomen dat $f^{-1}(f(A)) = A$ juist is voor elke deelverzameling A van X. Het geldt dus ook voor $A = \{x_2\}$. Voor $A = \{x_2\}$ vinden we dat $f(A) = \{f(x_2)\}$. Omdat $f(x_1) = f(x_2)$ zien we dat $f(x_1) \in f(A)$ en bijgevolg $x_1 \in f^{-1}(f(A))$. De gelijkheid $A = f^{-1}(f(A))$ geldt, en dus $x_1 \in A$. Omdat $A = \{x_2\}$ volgt hieruit dat $x_1 = x_2$.

Uit $f(x_1) = f(x_2)$ volgt dus dat $x_1 = x_2$ en dit betekent precies dat f injectief is.

Bewijs van: f is injectief $\implies \forall A \in P(X) : f^{-1}(f(A)) = A$.

We nemen nu omgekeerd aan dat f injectief is. Neem $A \in P(X)$ willekeurig. We moeten bewijzen dat $f^{-1}(f(A)) = A$.

De inclusie $A \subset f^{-1}(f(A))$ is reeds bewezen in onderdeel (a). Het gaat er nu om om de andere inclusie te bewijzen.

Kies $x \in f^{-1}(f(A))$ willekeurig. Dit betekent dat $f(x) \in f(A)$. Er is dus een element van A, zeg $a \in A$, met $f(x) = f(a)$. Omdat f injectief is, volgt hieruit dat $x = a$. Dus $x \in A$. Omdat $x \in f^{-1}(f(A))$ willekeurig gekozen was volgt de inclusie $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

Zoals al gezegd is de andere inclusie al bewezen in onderdeel (a) en de gelijkheid $f^{-1}(f(A)) = A$ geldt voor elke $A \in P(X)$ (want A was willekeurig gekozen in $P(X)$).

Naam:

Vraag 3 In deze opgave is $f : X \to Y$ een functie en is R een equivalentierelatie op X.

We definiëren de relatie S op Y door $(y_1, y_2) \in S$ als en slechts als

$$\exists x_1 \in f^{-1}(y_1) : \exists x_2 \in f^{-1}(y_2) : (x_1, x_2) \in R.$$

(a) Is S reflexief? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(b) Is S symmetrisch? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(c) Is S transitief? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(d) Is S een equivalentierelatie? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Antwoord:

(a) S is niet altijd reflexief. S is niet reflexief indien f niet surjectief is.

Als f namelijk niet surjectief is, dan is er een element $y \in Y$ met $f^{-1}(y) = \emptyset$. In dat geval kunnen we zeker geen elementen $x_1 \in f^{-1}(y)$, $x_2 \in f^{-1}(y)$ vinden met $(x_1, x_2) \in R$ en bijgevolg is dan $(y, y) \notin S$. De relatie S is dan niet reflexief.

Als expliciet voorbeeld kun je bijvoorbeeld nemen $X = \{0\}$, $Y = \{a, b\}$ en $f : X \to Y$ met $f(0) = a$. Neem voor $R = \{(0, 0)\}$ de identieke relatie (dit is een equivalentierelatie op X). Dan is $(b, b) \notin S$.

(b) S is wel symmetrisch.

Om dit te bewijzen nemen we $(y_1, y_2) \in S$ willekeurig. Vanwege de definitie van S zijn er dan $x_1 \in f^{-1}(y_1)$ en $x_2 \in f^{-1}(y_2)$ met $(x_1, x_2) \in R$. Omdat R een equivalentierelatie is, is R in het bijzonder symmetrisch. Bijgevolg is $(x_2, x_1) \in R$.

Er geldt dus

$$\exists x_2 \in f^{-1}(y_2) : \exists x_1 \in f^{-1}(y_1) : (x_2, x_1) \in R \tag{1}$$

en dit betekent dat $(y_2, y_1) \in S$.

Merk op dat x_2 en x_1 in (1) dummy-veranderlijken zijn die geen eigen betekenis hebben. We kunnen ze een andere naam geven en de uitspraak blijft gelijk. In het bijzonder kunnen we x_1 en x_2 omwisselen en dan zien we dat (1) equivalent is met

$$\exists x_1 \in f^{-1}(y_2) : \exists x_2 \in f^{-1}(y_1) : (x_1, x_2) \in R$$

(c) S is niet noodzakelijk transitief.

Hier is een voorbeeld. Neem $X = \{a, b, c, d\}$ en $Y = \{1, 2, 3\}$ met functie $f : X \to Y$ gegeven door $f(a) = 1$, $f(b) = f(c) = 2$ en $f(d) = 3$. Dan is

$$f^{-1}(1) = \{a\}, \qquad f^{-1}(2) = \{b, c\}, \qquad f^{-1}(3) = \{d\}.$$

We nemen de equivalentierelatie R op X met equivalentieklassen $\{a, b\}$ en $\{c, d\}$. Dat wil zeggen

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}.$$

Dan is $(a, b) \in R$ met $a \in f^{-1}(1)$ en $b \in f^{-1}(2)$. Uit de definitie van S volgt dat $(1, 2) \in S$.

Ook is $(c, d) \in R$ met $c \in f^{-1}(2)$ en $d \in f^{-1}(3)$. Uit de definitie van S volgt dat $(2, 3) \in S$.

Het is echter niet waar dat $(1, 3) \in S$. Er zijn namelijk geen $x_1 \in f^{-1}(1)$ en $x_2 \in f^{-1}(3)$ met $(x_1, x_2) \in R$. Als immers $x_1 \in f^{-1}(1)$ en $x_2 \in f^{-1}(3)$ dan moet $x_1 = a$ en $x_2 = d$. Maar $(a, d) \notin R$.

Er geldt dus dat $(1, 2) \in S$ en $(2, 3) \in S$ terwijl $(1, 3) \notin S$. De relatie S is dus niet transitief.