

Tussentijdse Toets
Bewijzen en Redeneren
6 november 2013
Modeloplossing

Vraag 1. Zij $f : X \rightarrow Y$ een functie.

(a) Bewijs dat

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad (1)$$

geldt voor alle deelverzamelingen A en B van X .

(b) Laat door middel van een voorbeeld zien dat gelijkheid in (1) niet altijd hoeft te gelden.

(c) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : \forall B \in P(X) : f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

als en slechts als f injectief is.

Antwoord:

(a) We bewijzen de inclusie (1). Neem dus

$$y \in f(A \cap B)$$

willekeurig. Dit betekent dat

$$y = f(x)$$

voor een zekere $x \in A \cap B$. Deze x behoort zowel tot A als tot B . Omdat $x \in A$ en $y = f(x)$ geldt $y \in f(A)$. Net zo volgt uit $x \in B$ en $y = f(x)$ dat $y \in f(B)$. Dan behoort y tot de doorsnede

$$y \in f(A) \cap f(B).$$

Vermits we dit hebben aangetoond voor willekeurige $y \in f(A \cap B)$ bekomen we de inclusie (1).

(b) Definieer de functie

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto 3.$$

Definieer de deelverzamelingen $A := \{1\}$ en $B := \{2\}$ van $X = \mathbb{N}$. Omdat deze deelverzamelingen disjunct zijn volgt dat

$$f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$$

Anderzijds geldt dat $f(A) = f(\{1\}) = \{3\}$ en $f(B) = f(\{2\}) = \{3\}$, zodat

$$f(A) \cap f(B) = \{3\} \cap \{3\} = \{3\}.$$

Vermits $\emptyset \neq \{3\}$ is $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ en we zien aan dit voorbeeld dat gelijkheid in (1) niet altijd geldt.

Opmerking bij (b): er zijn heel veel andere voorbeelden te geven. Belangrijk is dat u expliciet de functie f en de verzamelingen A en B definieert en expliciet nagaat dat de gelijkheid in (1) niet geldt.

- (c) Gevraagd wordt om een equivalentie te bewijzen en daartoe gaan we twee implicaties bewijzen, namelijk

$$[\forall A \in P(X) : \forall B \in P(X) : f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)] \Rightarrow f \text{ is injectief} \quad (2)$$

en

$$f \text{ is injectief} \Rightarrow [\forall A \in P(X) : \forall B \in P(X) : f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)] \quad (3)$$

Bewijs van implicatie (2) We beginnen met de implicatie (2). Veronderstel dat

$$\forall A, B \in P(X) : f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \quad (4)$$

geldt. We moeten aantonen dat f injectief is en we doen dit uit het ongerijmde.

Neem dus aan dat f niet injectief is. Dan zijn er twee elementen $x_1, x_2 \in X$ met $x_1 \neq x_2$ en

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Definieer de deelverzamelingen $A := \{x_1\}$ en $B := \{x_2\}$ van X . Uit $x_1 \neq x_2$ volgt dat deze verzamelingen disjunct zijn en dus

$$f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset.$$

Anderzijds volgt uit $f(x_1) = f(x_2)$ dat

$$f(A) \cap f(B) = \{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\} \neq \emptyset.$$

We zien dat voor deze A en B de gelijkheid $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ niet geldt. Dit is in tegenspraak met (4). We hebben dus uit het ongerijmde bewezen dat f injectief is en de eerste implicatie (2) is bewezen.

Bewijs van implicatie (3) Vervolgens bewijzen we de implicatie (3). Neem daartoe aan dat f injectief is. Neem $A \in P(X)$ en $B \in P(X)$ willekeurig. Dan moeten we aantonen dat de gelijkheid in (4) geldt.

De inclusie $\subset$ is reeds bewezen in deel (a). We bewijzen nu de inclusie $\supset$. Kies dus

$$y \in f(A) \cap f(B)$$

willekeurig. Er geldt dan dat $y \in f(A)$ en $y \in f(B)$. Uit $y \in f(A)$ volgt het bestaan van een $a \in A$ zodat $y = f(a)$. Uit $y \in f(B)$ volgt het bestaan van een $b \in B$ zodat $y = f(b)$. We besluiten dat

$$y = f(a) = f(b), \quad \text{met } a \in A, b \in B.$$

Door de injectiviteit van f volgt hieruit dat $a = b$. Hieruit volgt dat $a \in A \cap B$. Omdat $y = f(a)$, volgt dan ook uit de definitie van het beeld van een verzameling dat

$$y \in f(A \cap B).$$

Omdat $y \in f(A) \cap f(B)$ willekeurig gekozen was volgt de inclusie

$$f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B).$$

De andere inclusie was reeds bewezen en dus geldt de gelijkheid

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Omdat A en B willekeurig gekozen waren in $P(X)$ concluderen we dat

$$\forall A \in P(X) : \forall B \in P(X) : f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

De implicatie (3) is ook bewezen.

Vraag 2. In deze opgave is $f : X \rightarrow Y$ een functie en is R een equivalentierelatie op X . We definiëren de relatie S op Y door

$$S = \{(y_1, y_2) \in Y \times Y \mid \exists x_1 \in f^{-1}(y_1) : \exists x_2 \in f^{-1}(y_2) : (x_1, x_2) \in R\}.$$

Is S (a) reflexief, (b) symmetrisch, (c) transitief? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Antwoord:

- (a) De relatie S is **niet noodzakelijk reflexief**. Immers als we voor $f : X \rightarrow Y$ een willekeurige functie nemen die niet surjectief is, dan bestaat er een $y \in Y$ met $f^{-1}(y) = \emptyset$ en dan behoort het koppel (y, y) niet tot de relatie S .

Elke niet-surjectieve functie kunnen we nemen voor een expliciet tegenvoorbeeld. Neem bijvoorbeeld $X = \{1, 2\}$, $Y = \{a, b, c\}$ en $f : X \rightarrow Y$ met $f(1) = a$ en $f(2) = b$. Neem eender welke equivalentierelatie R op X . Dan is $f^{-1}(c) = \emptyset$, en dus vanwege de definitie van S is $(c, c) \notin S$. S is dan niet reflexief.

- (b) We bewijzen dat S **symmetrisch** is. Zij dus $y_1, y_2 \in Y$ en veronderstel dat

$$(y_1, y_2) \in S.$$

Per definitie van S bestaan er dan $x_1 \in f^{-1}(y_1)$ en $x_2 \in f^{-1}(y_2)$ zodat $(x_1, x_2) \in R$. Vermits R een equivalentierelatie is geldt dan ook $(x_2, x_1) \in R$. We besluiten dat

$$(y_2, y_1) \in S,$$

aangezien de elementen $x_2 \in f^{-1}(y_2)$ en $x_1 \in f^{-1}(y_1)$ zodanig zijn dat $(x_2, x_1) \in R$. Dit bewijst de symmetrie van S .

- (c) De relatie S is **niet noodzakelijk transitief**. Als tegenvoorbeeld nemen we $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c\}$ en we definiëren de functie $f : X \rightarrow Y$ door

$$f(1) = a, \quad f(2) = f(3) = b, \quad f(4) = c.$$

Verder is R de unieke equivalentierelatie op X waarvan de equivalentieklassen gegeven worden door $\{1, 2\}$ en $\{3, 4\}$. Dan kunnen we eenvoudig nagaan dat

$$(a, b) \in S \quad \text{en} \quad (b, c) \in S, \quad \text{maar} \quad (a, c) \notin S.$$

Dit geeft ons een tegenvoorbeeld voor de transitiviteit van S .

Vraag 3. De rij van getallen $a_0, a_1, a_2, \dots$ wordt gedefinieerd door $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ en

$$a_{n+2} = \frac{1}{2} \left(a_{n+1} + \frac{2}{a_n} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Bewijs met volledige inductie dat $1 \leq a_n \leq 2$ geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Antwoord:

Basisstap: In de basisstap controleren we of de bewering klopt voor $n = 0$ en $n = 1$. Het is gegeven dat $a_0 = 1$ en $a_1 = 1$ en bijgevolg is $1 \leq a_n \leq 2$ juist voor $n = 0$ en $n = 1$.

Inductiestap: In de inductiestap nemen we $k \in \mathbb{N}_0$ en we veronderstellen dat de bewering juist is voor k en voor $k - 1$. Dus we nemen aan dat

$$1 \leq a_k \leq 2 \quad \text{en} \quad 1 \leq a_{k-1} \leq 2.$$

We gaan dit gebruiken om de bewering aan te tonen voor $n = k + 1$. Te bewijzen is dus dat

$$1 \leq a_{k+1} \leq 2.$$

We gebruiken (5) met $n = k - 1$, hetgeen mag want $k - 1 \in \mathbb{N}$. Dus

$$a_{k+1} = \frac{1}{2} \left(a_k + \frac{2}{a_{k-1}} \right) = \frac{a_k}{2} + \frac{1}{a_{k-1}}. \quad (6)$$

Uit $1 \leq a_k \leq 2$ volgt dat

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a_k}{2} \leq 1$$

en uit $1 \leq a_{k-1} \leq 2$ volgt dat

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{a_{k-1}} \leq 1.$$

Optellen van deze twee ongelijkheden levert

$$1 \leq \frac{a_k}{2} + \frac{1}{a_{k-1}} \leq 2.$$

Vanwege (6) hebben we dan $1 \leq a_{k+1} \leq 2$ en de inductiestap is bewezen.

Conclusie: Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn is de gevraagde eigenschap aangetoond vanwege het principe van volledige inductie.

Opmerking: we gebruiken hier een uitbreiding van het principe van volledige inductie, waar bij we in de inductiestap aannemen dat het gevraagde waar is voor k en voor $k - 1$. In de basisstap moet je dan de uitspraak controleren voor $n = 0$ en voor $n = 1$.

Het is ook mogelijk om het sterke principe van inductie te gebruiken. Hierbij neem je $k \geq 1$ in de inductiestap en je neemt aan dat de uitspraak waar is voor alle $j \leq k$. In het bijzonder is de uitspraak dan waar voor k en voor $k - 1$. Ook in dit geval moet je in de basisstap de uitspraak controleren voor zowel $n = 0$ als voor $n = 1$.