AB: gekwoteerde oefenzitting 1
31 okt 2017 8u30/9u tot 10u30

1 Algebra van talen

Voor een niet-lege eindige taal L_E en een niet-reguliere contextvrije taal L_C, beiden over hetzelfde alfabet, bespreek de volgende uitspraken (altijd juist, altijd fout, soms juist, soms fout) en beargumenteer jouw antwoord.

1. $L_C \cap L_E$ is regulier

   Antwoord: altjd regulier want eindig.

2. $L_C \cup L_E$ is regulier

   Antwoord: nooit. Bewijs door contradictie. Stel $L_C \cup L_E$ regulier.

   Ook $(L_E \setminus L_C)$ is eindig en dus regulier.

   $L_C = (L_C \cup L_E) \setminus (L_E \setminus L_C)$.

   Beide termen rechts zijn regulier. Reguliere talen zijn gesloten onder algebraische operaties. Dus is ook L_C regulier. Contradictie.

3. $L_C \cap L_E^C$ is regulier Antwoord: nooit, zelfde soort bewijs:

   $L_C = L_C \cap L_E^C \cup (L_E \cap L_C)$

   Check dat onder de assumptie, beide termen rechts regulier zijn.

4. $L_C \cup L_E^C$ is context-vrij

   Antwoord: altijd. Unie van context-vrij en reguliere taal is context-vrij, omdat push-down automata en automata kunnen samengesteld worden tot een push-down automaton.

2 Pompend lemma

Bewijs de volgende uitspraken.

1. De taal $\{0^n 1 0^n | n \in \mathbb{N}\}$ is niet regulier

   Bewijs door contradictie. Zij p de pomplengte. Neem de string $0^p 1 0^p$ ontbonden in xyz. Dan bestaat xy uit nullen; y uit minstens 1 nul; dan bevat xz geen gelijk aantal nullen aan beide zijde van de 1.

2. De taal $\{w \in \{a, b, c\}^* |$ w bevat een even(=gelijk) aantal a's, b's en c's$\}$ is niet context-vrij.

   Bewijs door contradictie. Zij p de pomplengte. Neem de string $a^p b^p c^p$ met ontbinding in $uvxyz$. vxy bevat hoogstens twee van de drie symbolen. Bij weglating van v en y, in uxz, ontstaat onevenwicht met het derde symbool.

3 Wat voor taal?

Zijn de volgende talen 1) regulier; 2) niet regulier maar wel context-vrij; of 3) niet context-vrij. Bewijs.

1. $\{a^m b^n c^n d^m | n, m \in \mathbb{N}\}$

   Niet regulier ($b^p c^p$ kan niet opsplitst worden volgens pompend lemma zoals bewezen in cursus).

   Wel context-vrij

$$S \to aSd \mid M$$
$$M \to bMc \mid \epsilon$$

2. $\{a^n | n \in \mathbb{N}, n \text{ is oneven}, n \text{ is een veelvoud van } 3\}$

   Regulier: doorsnede van $\{a^n | n \in \mathbb{N}, n \text{ is oneven}\} = a(aa)^*$ en $\{a^n | n \in \mathbb{N}, n \text{ is een veelvoud van } 3\} = (aaa)^*$. Beide zijn reguliere talen.

4 Swapped

De operatie $swap(s,i)$ krijgt als input de string $s = a_1a_2...a_n$ en een positie i en geeft als output de string $w = a_1...a_{i+1}a_i...a_n$ die gelijk is aan s behalve dat de symbolen op plaats i en $i+1$ van plaats zijn veranderd. Gegeven een taal L, kunnen we een nieuwe taal $swapped(L)$ defineren zodat

$$swapped(L) = \{w | s \in L, \exists i : 1 \leq i \leq |s| - 1 \wedge w = swap(s,i)\}$$

Voorbeeld. Indien $L = \{$leuk, toets$\}$, dan is $swapped(L) = \{$eluk, luek, leku, otets, teots, totes, toest$\}$.

1. Bewijs dat voor elke reguliere taal L de taal $L_1 = L \cup swapped(L)$ ook regulier is.

   Antwoord: Neem een automaton A van L, voeg een copie A' eraan toe (copieer alle toestanden s naar s'; copieer alle transities); de begintoestand van dit unie-automaton is die van A; de accepterende toestanden zijn die van A en hun copieen van A'. Voor alle paden $s_0 \overset{ab}{\to} s_1$ in A, voeg $s_0 \overset{ba}{\to} s_1'$ toe, waarbij s_1' de copie is van s_1 in A'. We zagen in de cursus reeds verschillende keren hoe dit uit te werken (voeg een set van intermediaire toestanden s'' aan A toe met bogen $s_0 \overset{b}{\to} s_0'' \overset{a}{\to} s_1'$).

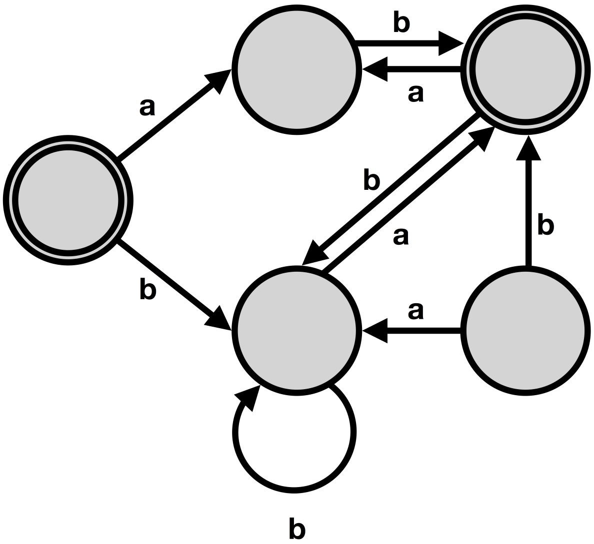
2. Wat verandert er als ik enkel de taal $swapped(L)$ wil aanvaarden?

   Antwoord: laat accepterende toestand van A vallen. Dus enkel accepterende toestanden van A' zijn accepterend.

3. Is $swapped(swapped(L))$ nog steeds regulier?

   Antwoord: ja. Herhaal de constructie.

5 Minimale DFA



Construeer een DFA die dezelfde taal aanvaardt als de DFA in de figuur hierboven maar een minimaal aantal toestanden heeft. Toon de tussenstappen van jouw redenering.
Antwoord: We nummeren de states met de klok mee, vanaf de linkse toestand: $p0, p1, p2, p3, p4$. $p0$ is start node.
We voegen de garbage node $p_\perp$ toe, waarnaartoe alle onbrekende overgangen gaan: $p1 \overset{a}{\to} p_\perp$, en verder $p_\perp \overset{a}{\to} p_\perp$ en $p_\perp \overset{b}{\to} p_\perp$.
We schrappen onbereikbare toestand $p3$.
We berekenen f-verschillend:

	$p0$	$p1$	$p2$	$p4$	$p_\perp$
$p0$		ϵ		ϵ	ϵ
$p1$			ϵ	a	b
$p2$				ϵ	ϵ
$p4$					a

f-gelijk is dus $p0 = p2$. Deze twee toestanden moeten gemerged worden.
Het resultaat is de deelautomaton bestaande uit $\{p1, p2, p4\}$ met start en unieke accepterend node $p2$.