OPLOSSINGEN PROEFEXAMEN LINEAIRE ALGEBRA
vrijdag 23 november 2007

1. (a) *Zij V een vectorruimte. Leg uit wat een maximaal vrij deel is van V en bewijs dat een maximaal vrij deel steeds een basis is van V.*

   (b) *Zij $\mathcal{A} : V \to V$ een lineaire transformatie van een eindigdimensionale vectorruimte, en $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}'$ twee basissen van V.*
   Geef en bewijs de formule die de matrix van $\mathcal{A}$ ten opzichte van $\mathcal{E}'$ uitdrukt in termen van de matrix van $\mathcal{A}$ ten opzichte van $\mathcal{E}$ en de matrix van basisverandering van $\mathcal{E}$ naar $\mathcal{E}'$.

   Zie cursus. (theorievraag)

2. *Zij V een 7-dimensionale vectorruimte. Beschouw in V twee deelruimten U en W zodat $dim(U) = dim(W) = 5$.*

   a) *Toon aan dat er drie lineair onafhankelijke vectoren v_1, v_2 en v_3 in de doorsnede $U \cap W$ bestaan.*
   Wegens de dimensiestelling en het feit dat $\dim(U) = \dim(W) = 5$ geldt er dat:
   $$10 = \dim(U) + \dim(W) = \dim(U + W) + \dim(U \cap W).$$
   Aangezien $U + W$ een deelruimte is van V geldt er dat $\dim(U + W) \leq \dim(V) = 7$. Combineren we dit met voorgaand resultaat, dan krijgen we dat $\dim(U \cap W) \geq 3$. Het is dan niet meer moeilijk om drie lineair onafhankelijke vectoren in $U \cap W$ te vinden; het volstaat namelijk om drie vectoren te beschouwen uit een basis van $U \cap W$, dewelke minstens drie vectoren bevat.

   b) *Onderstel nu dat $dim(U) = 4$ en verder nog steeds $dim(W) = 5$. Geldt de bewering uit a) nog steeds? Zo ja, toon aan. Zo niet, geef een concreet tegenvoorbeeld.*
   Volgen we dezelfde redenering als in a), dan krijgen we in dit geval dat $\dim(U \cap W) \geq 2$. Indien we hierin gelijkheid zouden bekomen, dan is het niet meer mogelijk om drie lineair onafhankelijke vectoren te vinden. Immers, twee van deze vectoren vormen een basis van $U \cap W$, zodat de derde noodzakelijk een lineaire combinatie moet zijn van de andere.
   Het is ook niet moeilijk om een voorbeeld te vinden waarbij de gelijkheid ook effectief verkregen wordt. Stel namelijk $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 6}$, $U = [1, x, x^2, x^3]$ en $W = [x^2, x^3, x^4, x^5, x^6]$. Dan wordt een basis van de doorsnede gegeven door $\{x^2, x^3\}$ zodat hier $U \cap W$ tweedimensionaal is.

3. *Zij a en b reële parameters. Onder welke voorwaarden op a en b heeft onderstaand stelsel oneindig veel oplossingen? Geen oplossingen? Juist één oplossing? Geef in het laatste geval ook de oplossing van het stelsel.*
$$\left\{ \begin{array}{cccc} ax_1 & + & 2x_2 & = & 6 \\ 2x_1 & + & (a-b)x_2 & = & a-1 \end{array} \right.$$

   We lossen dit stelsel op met behulp van Gausseliminatie.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & 2 & 6 \\ 2 & a-b & a-1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & a-b & a-1 \\ a & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - \frac{a}{2} R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & a-b & a-1 \\ 0 & 2-\frac{a}{2}(a-b) & 6-\frac{a}{2}(a-1) \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -2R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & a-b & a-1 \\ 0 & a(a-b)-4 & a^2-a-12 \end{array}\right)$$

Geval 1: $a(a-b)-4 \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & a-b & a-1 \\ 0 & a(a-b)-4 & a^2-a-12 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{a(a-b)-4} R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & a-b & a-1 \\ 0 & 1 & \frac{a^2-a-12}{a(a-b)-4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - (a-b) R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & a-1-(a-b)\frac{a^2-a-12}{a(a-b)-4} \\ 0 & 1 & \frac{a^2-a-12}{a(a-b)-4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2} R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2}\left(a-1-(a-b)\frac{a^2-a-12}{a(a-b)-4}\right) \\ 0 & 1 & \frac{a^2-a-12}{a(a-b)-4} \end{array}\right)$$

In dit geval heeft ons stelsel dus steeds 1 oplossing, namelijk

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{(a-1)(a(a-b)-4)-(a-b)(a^2-a-12)}{2(a(a-b)-4)}, \frac{a^2-a-12}{a(a-b)-4}\right).$$

Geval 2: $a(a-b)-4 = 0$ en $a^2-a-12 = 0$

Merk op dat $a^2-a-12 = 0 \Leftrightarrow a \in \{-3, 4\}$.
Als $a = 4$ volgt uit $a(a-b)-4 = 0$ dat $b = 3$. Analoog impliceert $a = -3$ dat $b = \frac{-5}{3}$.
Omdat

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & a-b & a-1 \\ 0 & a(a-b)-4 & a^2-a-12 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & a-b & a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

zijn in dit geval de twee vergelijkingen uit de opgave linear afhankelijk. Het stelsel heeft dus oneindig veel oplossingen voor $(a,b) \in \{(4,3), (-3, \frac{-5}{3})\}$.

Geval 3: $a(a-b)-4 = 0$ en $a^2-a-12 \neq 0$

De tweede rij in

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & a-b & a-1 \\ 0 & a(a-b)-4 & a^2-a-12 \end{array}\right)$$

geeft aan dat we in dit geval te maken hebben met een strijdig stelsel. Het stelsel heeft dus geen oplossingen als $a(a-b) = 4$ en $a \notin \{-3, 4\}$.

4. *Zij* $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2\}$.

   (a) Is K *een lineaire deelruimte van* $\mathbb{R}^3$*?*

   (b) Toon aan dat $< K >= \mathbb{R}^3$.

   (a) K is geen lineaire deelruimte. Neem $v_1 = (1, 0, 1)$ en $v_2 = (1, 0, -1)$. Dan kunnen we nagaan dat $v_1, v_2 \in K$, maar $v_1 + v_2 = (2, 0, 0) \notin K$.

   (b) Dat $< K >$ een deel is van $\mathbb{R}^3$ is evident. We moeten dus nog aantonen dat elk element uit $\mathbb{R}^3$ kan geschreven worden als een lineaire combinatie van elementen uit K. Hiervoor zijn verschillende werkwijzen mogelijk.
   Methode 1: $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$ en $(0, 0, 1)$ zijn vectoren uit K. Deze vormen een basis van $\mathbb{R}^3$. (Dit laatste kan je bijvoorbeeld aantonen door de vectoren in de kolommen van een determinant te zetten en na te gaan dat die determinant verschillend is van nul.) Bijgevolg is elk element van $\mathbb{R}^3$ inderdaad een lineaire combinatie van elementen uit K en is $< K >= \mathbb{R}^3$.
   Methode 2: Kies $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ willekeurig. Dan is $(x, y, z) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) + (0, 0, z - \sqrt{x^2 + y^2})$. Deze laatste twee vectoren behoren tot K, dus $< K >= \mathbb{R}^3$.