Langere vraag over de theorie

a) Bereken de potentiaal van een uniform geladen ring met straal R voor een punt dat gelegen is op een afstand x van het centrum van de ring op de as loodrecht op het vlak van de ring.

b) Leid een algemene uitdrukking af die toelaat om uit een berekende potentiaal de elektrische-veldvector af te leiden.

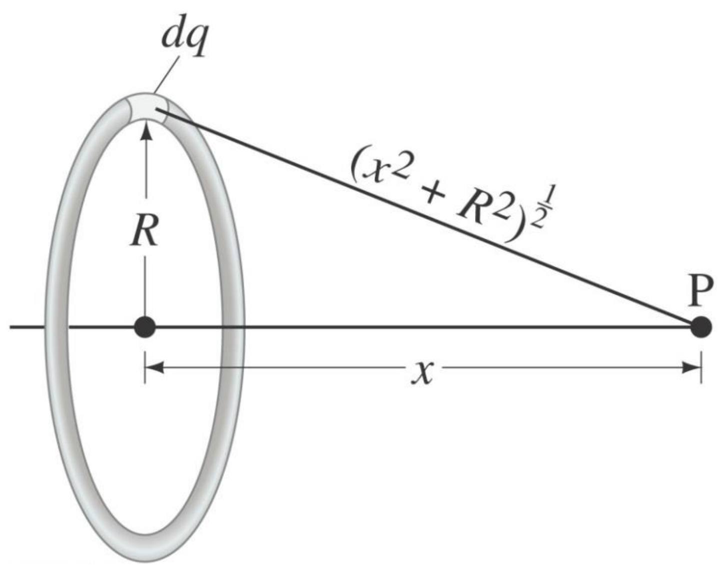
a) Maak gebruik van de in b) bekomen algemene uitdrukking om uit het in a) bekomen resultaat voor de potentiaal van de uniform geladen ring de elektrische-veldvector van de ring te berekenen in een punt x op de as loodrecht op het vlak van de ring.

a) Potentiaal voor de uniform geladen ring

De potentiaal die veroorzaakt wordt door een continue ladingsverdeling wordt gegeven door (zie formularium):

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

We passen dit resultaat dan toe op het geval van een uniform geladen ring die getoond wordt in onderstaande figuur:



De totale lading Q is uniform verdeeld over de ring met straal R. We hebben een lineaire ladingsverdeling met dichtheid $\lambda = Q/(2\pi R)$.

We mogen de berekening beperken tot de punten op de x-as die loodrecht staat op het vlak van de ring. De stukjes van de ring met gelijke lading dq bevinden zich allemaal op dezelfde afstand $(x^2+R^2)^{1/2}$ van het punt P op de x-as waar we de potentiaal berekenen. We vinden dan dat

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(x^2 + R^2\right)^{1/2}}\int dq$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2 + R^2\right)^{1/2}}$$

b) Veld-vector afleiden uit de potentiaal

We starten van het verband tussen potentiaalverschil en veld:

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$$

Dit kunnen we herschrijven in differentiaalvorm met E_ℓ de component van het veld in de richting van $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$:

$$dV = -\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\ell} = -E_\ell \, d\ell$$

Hieruit vinden we dat

$$E_\ell = -\frac{dV}{d\ell}$$

Dit wil zeggen dat de component van het elektrisch veld in een willekeurige richting gelijk is aan min de afgeleide van de potentiaal in die richting.

We krijgen dan volgend algemeen verband tussen de componenten van het veld en de potentiaal:

$$\boxed{E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}}$$

c) Veld-vector berekenen voor de ring

We kunnen dit algemene resultaat nu toepassen op de homogeen geladen ring om het veld te bekomen langsheen de as (x-as) loodrecht op de ring (zie deel a) hiervoor):

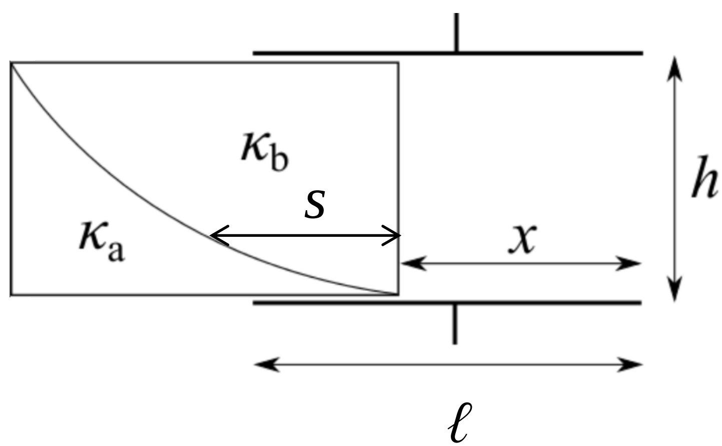
$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2 + R^2\right)^{1/2}}$$

Het veld is dan gericht volgen de x-as en weg van de ring voor een positieve lading. De grootte van het veld wordt gegeven door

$$E_x(x) = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

Oefening

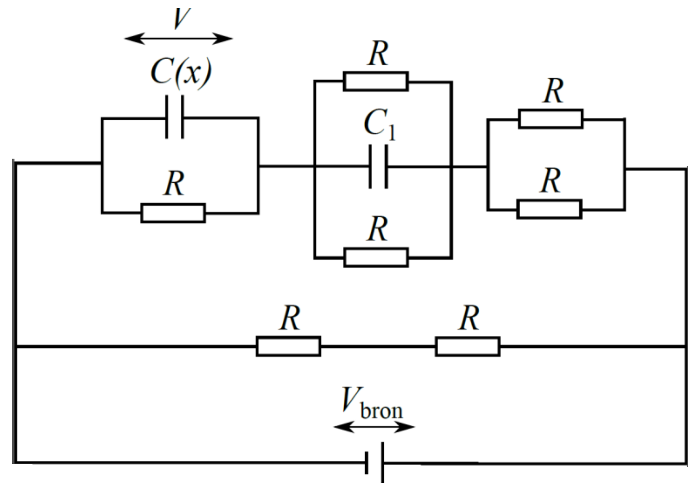
Bekijk onderstaande tekening van een condensator met het diëlektricum deels erin geschoven. Het grond- en bovenvlak zijn vierkant en hebben dus een oppervlakte ℓ^2. Het diëlektricum past precies tussen de platen van de condensator (dus ook vierkant grondvlak met zijde ℓ en een hoogte h). Het diëlektricum bestaat uit twee verschillende materialen elk met een andere diëlektrische constante: κ_a en κ_b. De scheidingslijn tussen de twee materialen is een parabool van de vorm $\mathrm{f}(s) = as^2$ met a een constante.



de condensator

1. Bereken de capaciteit $C(x)$ van de condensator in functie van x.

Nu plaatsen we de condensator in onderstaande elektrische kring.



de elektrische kring

2. Bereken de bronspanning V_{bron} die moet aangelegd worden zodanig dat er een spanning V over de condensator $C(x)$ komt te staan.

   Terwijl de condensator in de schakeling staat, halen we het diëlektricum er volledig uit en brengen het er met een beginsnelheid v_b terug in.

3. Bereken de snelheid die het diëlektricum heeft wanneer het terug volledig tussen de platen van de condensator zit.

Deel 1: $C(x)$ berekenen

* Alvorens de capaciteit $C(x)$ te berekenen zoeken we eerst het functioneel verband $f(s) = a s^2$:

$$f(s = l) = h \Rightarrow a l^2 = h \Rightarrow a = \frac{h}{l^2}$$

$$\Rightarrow f(s) = \left(\frac{s}{l}\right)^2 h$$

Het deel van de condensator zonder diëlektricum heeft afmetingen $x \times l$, terwijl het deel met diëlektricum afmetingen $(l-x) \times l$ heeft [laterale afmetingen!].

* De totale capaciteit $C(x) = \varepsilon_0 x l / h + C_d(x)$ omdat de condensatordelen met en zonder diëlektricum in parallel staan.

* De capaciteit van het deel met diëlektricum vinden we als de parallelschakeling van verticale reepjes met breedte ds. Ieder reepje met totale hoogte l bestaat uit de serieschakeling van condensatoren met diëlektrica K_a [hoogte is $f(s)$] en K_b [hoogte is $h - f(s)$]. De capaciteit van één enkel reepje is dan gelijk aan

$$\frac{1}{dC_d} = \frac{1}{dC_a} + \frac{1}{dC_b}$$

met
$$\begin{cases} dC_a = \dfrac{K_a \epsilon_0 \, l \, ds}{f(s)} \\ dC_b = \dfrac{K_b \epsilon_0 \, l \, ds}{h - f(s)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{dC_d} = \frac{f(s)}{K_a \epsilon_0 l\, ds} + \frac{h - f(s)}{K_b \epsilon_0 l\, ds}$$

$$= \frac{K_b f(s) + K_a (h - f(s))}{K_a K_b \epsilon_0 l\, ds}$$

* De capaciteit C_d van het deel met diëlektricum vinden we dan door de reepjes met capaciteit dC_d te sommeren, dit is te integreren:

$$C_d(x) = \int_0^{l-x} dC_d = \frac{K_a K_b \epsilon_0 l\, ds}{K_b \frac{s^2}{l^2} h + K_a \left(1 - \frac{s^2}{l^2}\right) h}$$

$$= \frac{K_a K_b \epsilon_0 l^3}{h} \int_0^{l-x} \frac{ds}{K_a l^2 - s^2 (K_a - K_b)}$$

⇒ Deze integraal kon verder uitgewerkt worden met behulp van de gekende integraal

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \text{constante}$$

Als het hier wat misloopt, worden hiervoor geen punten afgetrokken. De oplossing in integraalvorm is voldoende!

Deel 2: berekenen van de aan te leggen bronspanning

* Bij evenwicht (na voldoende lange tijd) loopt er geen stroom meer door de condensatoren in het elektrisch schema. We vinden dan dat de equivalente weerstand voor het gehele circuit gegeven wordt door $R_{eq} = R$ en de totale stroom door $I = V_{bron}/R$. Door de weer-

Stand R die in parallel staat met de condensator $C_1(x)$ loop dan de helft van die stroom dit is $V_{bron}/2R$, zodat er een potentiaalverschil $V_{bron}/2$ over de condensator $C_1(x)$ staat

$\Rightarrow$ Als er een potentiaalverschil V moet staan over de condensator $C_1(x)$ moet V_{bron} dus twee maal zo groot als V genomen worden:

$$V_{bron} = 2V$$

Deel 3: snelheid van het diëlektricum berekenen

* We berekenen de finale snelheid v_f als de begin-snelheid v_b is. We steunen op het behoud van energie:

$$\Delta U = -\Delta K = -\frac{1}{2} m \left(v_f^2 - v_b^2\right)$$

$$\Delta U = U_f - U_b = \frac{C_d'(x=0)V^2}{2} - \frac{\varepsilon_0 l^2 V^2}{2h}$$

Hierbij wordt $C_d(x)$ gegeven door het resultaat gevonden voor vraag 1. We maakten ook gebruik van het feit dat de energie opgeslagen in een condensator gegeven wordt door $U = CV^2/2$ en er over de condensator $C(x)$ steeds een potentiaalverschil $V = V_{bron}/2$ staat. We vinden tenslotte:

$$v_f = \left[v_b^2 - \frac{V^2}{m} \left(C_d(x=0) - \frac{\epsilon_0 l^2}{h} \right) \right]^{1/2}$$

4 korte vragen

1. Het x-y vlak is bedekt met een uniforme ladingsdichtheid gelijk aan 1 nC/m^2. Beschouw een sferisch oppervlak met een straal van 10 cm en met middelpunt gelegen in het x-y vlak. Als de uniforme ladingsdichtheid zich oneindig ver uitstrekt in de laterale richting, wat is dan de elektrische flux door het deel van het sferisch oppervlak waarvoor $z > 0$?

We maken gebruik van de wet van Gauss die een algemeen verband uitdrukt tussen de netto elektrische flux doorheen een gesloten oppervlak (Gaussisch oppervlak) en de totale lading die wordt ingesloten door dit oppervlak:

$$\Phi_E = \oiint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{ing}}{\varepsilon_0}$$

In dit geval is het Gaussisch oppervlak een sfeer met middelpunt gelegen in het x-y vlak dat uniform geladen is. Het elektrisch veld van het uniform geladen x-y vlak (dikte gaat naar nul) wordt gegeven door

$$E = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}$$

Dit elektrisch veld staat loodrecht op het *x*-*y* vlak en wijst aan beide kanten weg van het vlak.

De elektrische flux door de bovenste ($z > 0$) en de onderste helft ($z < 0$) van de Gaussische sfeer is positief (wijst naar buiten ten opzichte van de sfeer) en is tevens gelijk in grootte. We passen dan de wet van Gauss toe waarbij de ingesloten lading gegeven wordt door

$$Q_{ing} = \pi\, r^2 \sigma = 3.14\ (0.1)^2\, 10^{-8}\,\mathrm{C}$$

De wet van Gauss levert dan voor de helft van de flux

$$\frac{\Phi_E}{2} = \frac{Q_{ing}}{2\varepsilon_0} = \frac{3.14\ \ 10^{-10}\ \mathrm{C\,N\,m^2}}{2\ 8.85\ \ 10^{-12}\ \mathrm{C}^2} \approx 18\ \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C}}$$

$\rightarrow$ Dit is het antwoord b!

2. In een metaal is de dichtheid van de vrij bewegende elektronen die zorgen voor de elektrische geleiding heel hoog en bedraagt typisch 10^{23} cm^{-3}. Maak gebruik van deze dichtheid om een afschatting te maken van de driftsnelheid van de geleidingselektronen in een metalen draad met een doorsnede van 1 mm^2, een lengte van 10 m, een resistiviteit $\rho = 10^{-5}$ Ωcm en een potentiaalverschil van 1 V tussen beide uiteinden van de draad.

Eerst berekenen we de weerstand van de draad via

$$R = \rho \frac{\ell}{A}$$

Hierbij zijn zowel $\rho = 10^{-5}$ Ωcm als $A = 1$ mm^2 en $\ell = 10$ m gekend, waaruit we $R = 1$ Ω vinden. Uit de wet van Ohm leren we dan dat de stroom $I = 1$ V/Ω = 1 A.

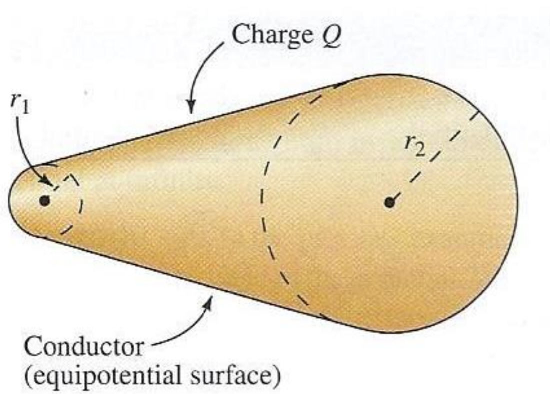
We maken vervolgens gebruik van het verband tussen de stroomdichtheid j, de dichtheid n van de vrij bewegende elektronen en de driftsnelheid v_d van deze elektronen:

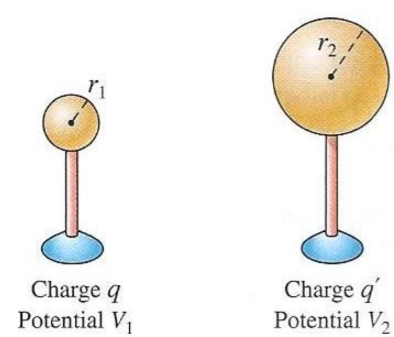
$$j = \frac{I}{A} = -ne\,v_\mathrm{d} \qquad \text{en} \qquad \vec{\mathbf{j}} = -ne\,\vec{\mathbf{v}}_\mathrm{d}$$

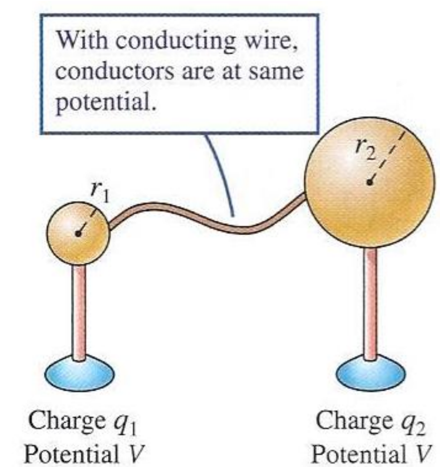
Vermits we de stroomdichtheid j = 1 A / 10^{-6} m^2 = 10^6 A/m^2 kennen alsook de lading e = 1.6 x 10^{-19} C en de dichtheid n = 10^{29} m^3, vinden we tenslotte dat v_d = 0.06 mm/s.

3. Toon aan hoe we het “punteffect” (het elektrisch veld van een metaaloppervlak is het grootst waar de kromming van een metaaloppervlak het grootst is) kunnen verklaren door te berekenen hoe het elektrisch veld afhangt van de straal voor twee geladen metalen sferen met respectievelijke stralen r_1 en r_2.

We kunnen dit aantonen door, zoals hieronder geïllustreerd, twee metalen sferen te beschouwen met stralen r_1 en r_2. We verbinden de sferen dan met een metalen draad zodat ze op dezelfde potentiaal komen. Dit is nodig omdat op een metaaloppervlak met lokaal verschillende krommingen alle punten van het oppervlak zich op dezelfde potentiaal bevinden (elektrostatische evenwicht met een stabiele ladingsverdeling).







Voor een metalen sfeer met straal r en lading Q wordt de potentiaal van het oppervlak gegeven door

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

De twee elektrisch verbonden sferen met verschillende straal r_1 en r_2 bevinden zich op dezelfde potentiaal zodat voor de ladingsdichtheden σ en voor de elektrische velden E geldt dat:

$$\sigma_1 r_1 = \sigma_2 r_2 \qquad \text{en} \qquad \frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Hierbij hebben we gesteund op het feit dat het elektrisch veld van een sfeer met ladingsdichtheid σ gegeven wordt door $E = \sigma/\varepsilon_0$. We vinden dus dat het elektrisch veld omgekeerd evenredig met de kromtestraal varieert, wat meteen ook het “punteffect” verklaart.

4. Een positieve puntlading q wordt geplaatst in het centrum van een ongeladen holle metalen sfeer. Aan de buitenkant van de sfeer wordt dan een aarding aangebracht zoals aangegeven in onderstaande figuur. Vervolgens wordt de aarding verwijderd. Het binnenste oppervlak duiden we aan met A en het buitenste oppervlak met B. Welke bewering is correct?

- Omwille van het elektrostatisch evenwicht moet het veld $E = 0$ in het metaal tussen de binnenkant A en de buitenkant B van de holle sfeer.
- Voordat de aarding wordt aangebracht zal de positieve lading q in het centrum op de binnenkant A een negatieve lading $-q$ induceren die homogeen verdeeld zit over de binnenkant. Omwille van het behoud van lading komt er dan op de buitenkant B een positieve lading q te zitten die eveneens homogeen verdeeld zit over de buitenkant.

- Na het aanbrengen van de aarding moet de potentiaal $V = 0$ worden op de buitenkant B. Omwille van het elektrostatisch evenwicht mag er dan geen elektrisch veld opgebouwd worden tussen de buitenkant van de sfeer en de aarde. Vanuit de aarde worden daartoe vrije elektronen aangevoerd tot de positieve lading perfect gecompenseerd is.
- Na het aanbrengen van de aarding is de potentiaal V overal nul als we ons buiten de binnenkant A begeven. Het verwijderen van de aarding laat de ladingsverdeling dan ongewijzigd.

→ Antwoord (j) is dus het correcte antwoord!