Evaluatie 4 (08/03/2013)

Vraag 1. Zij p een reëel getal en beschouw de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$$

- Toon aan dat de convergentiestraal 1 is voor alle waarden van p.
- Voor welke waarden van $p \in \mathbb{R}$ convergeert de reeks in $x = 1$?
- Voor welke waarden van $p \in \mathbb{R}$ convergeert de reeks in $x = -1$?

Puntenverdeling:

- $0,5$ ptn op formule cvgtiestraal
- $0,5$ ptn op berekenen limiet
- $0,5$ ptn op berekenen waarden p als $x = 1$
- 0.5 ptn op berekenen waarden p als $x = -1$

Oplossing. Voor een machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ wordt de convergentiestraal gegeven door

$$R = \frac{1}{L} \qquad \text{met } L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

In dit geval vinden we:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^p}{(n+1)^p} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^p \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-p} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)^{-p} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Dus dan is $R = 1$. (**! De berekening van deze limiet moet enigszins uitgeschreven staan! Bovendien is p een willekeurig *reëel* getal!**

Laat nu $x = 1$. In dat geval krijgen we de zogenaamde p-reeksen. Het volstaat hier te verwijzen naar Example 1 op p. 511 om te concluderen dat in dit geval $p > 1$ nodig is. Je kan dit ook zelf doen door de integraaltest te gebruiken.

Laat ten slotte $x = -1$. In dat geval zullen we **niet** kijken naar absolute convergentie, aangezien dit niet gevraagd is. Het enige dat gevraagd wordt, is of de reeks convergeert. Dus, omdat het hier om een alternerende reeks gaat, volstaat het 2 zaken te controleren:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} = 0$?
2. $\frac{(-1)^n}{n^p} > \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^p}$?

Aan dit eerste is enkel voldaan indien $p > 0$. Aan de tweede voorwaarde is voldaan indien $p \geq 0$. We vinden dus dat de reeks convergeert indien $p > 0$.

Vraag 2. De temperatuur in graden Celsius in een deel van de ruimte wordt gegeven door $T(x, y, z) = 2x^2 - xyz$. Een deeltje beweegt in dit deel van de ruimte en de positie van het deeltje op ogenblik t wordt gegeven door $x = 2t^2, y = 3t, z = -t^2$, waarbij tijd wordt gemeten in seconden en afstand in meters.

(a) Hoe snel verandert de temperatuur die het deeltje gewaar wordt in graden Celsius per meter wanneer het deeltje zich in het punt $P(2, 3, -1)$ bevindt? Hint: bepaal eerst de richting waarin het deeltje zich op dat ogenblik beweegt.

(b) Hoe snel verandert de temperatuur die het deeltje gewaar wordt in graden Celsius *per seconde* wanneer het deeltje zich in P bevindt?

Puntenverdeling.

- 1 pt op vraag (a) (0.5 op bepalen gradient en richting, 0.5 op de uitkomst)
- 1 pt op vraag (b)

Oplossing.

(a) We volgen de hint, en bepalen dus eerst de richting waarin het deelte zich op dat ogenblik beweegt. Die richting wordt gegeven door de afgeleide van de positie naar de tijd, en is dus $(4t, 3, -2t)$. We bevinden ons in punt $P(2, 3, -1)$, wat overeenkomt met $t = 1$. De richting van het deelte op dat moment is dus $\vec{u} = (4, 3, -2)$. Aangezien we de verandering per meter willen weten, moeten we de richtingsvector normaliseren, en deze genormaliseerde richting dan gebruiken om de richtingsafgeleide te bepalen. We vinden dus

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \cdot \nabla T(2, 3, -1) = (\frac{4}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{-2}{\sqrt{29}}) \cdot (11, 2, -6) = \frac{44 + 6 + 12}{\sqrt{29}} = \frac{62}{\sqrt{29}}$$

en dit laatste is de verandering in graden Celsius per meter.

(b) Voor het bepalen van de verandering per seconde volstaat het de richtingsafgeleide te bepalen van de niet genormeerde richtingsvector. Het komt er dus op neer om de oplossing van vraag (a) te vermenigvuldigen met $\sqrt{29}$, en zo vinden we 62 graden Celsius per seconde.

Alternatief zou je ook $T(t)$ kunnen bepalen, en dit afleiden naar t.