MODELOPLOSSINGEN PROEFEXAMEN 2020

1. Vraag 1

Zie hiervoor het bewijs van stelling 3.53 in het boek.

Vraag 2

a. Deze uitspraak is waar. Zij A zoals in de opgave. Voor elke twee inverteerbare matrices $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ geldt dan dat $A = B_1AB_1^{-1} = B_2AB_2^{-1}$.

Stel dat de conclusie niet klopt, en dus dat voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \neq \lambda\mathbb{I}_n$. Er bestaat dus een vector $v \in \mathbb{R}^n$ zo dat voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $Av \neq \lambda v$. Dit betekent precies dat $\{v, Av\}$ een vrije verzameling is. We breiden deze verzameling uit tot een basis $\alpha = \{v, Av, v_3, \ldots, v_n\}$. We claimen dan dat ook $\beta = \{v, -Av, v_3, \ldots, v_n\}$ een basis is. Aangezien dit n vectoren zijn in een n dimensionale vector ruimte, is het genoeg om aan te tonen dat β vrij is. Maar

$$\begin{aligned}\lambda_1 v + \lambda_2(-Av) + \sum_{i=3}^{n} \lambda_i v_i = 0 &\Leftrightarrow \lambda_1 v + (-\lambda_2)Av + \sum_{i=3}^{n} \lambda_i v_i = 0\\ &\overset{\alpha \text{ is vrij}}{\Leftrightarrow} \lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0\\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0,\end{aligned}$$

en dus is β vrij. Zij nu $(\mathrm{Id})^\alpha_\epsilon, (\mathrm{Id})^\beta_\epsilon \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de bijbehorende basis transitie matrices, waar ϵ de standaard basis voor $\mathbb{R}^n$ is. Vanwege onze aanname geldt dan dat

$$(\mathrm{Id})^\alpha_\epsilon A(\mathrm{Id})^\epsilon_\alpha = (\mathrm{Id})^\alpha_\epsilon A((\mathrm{Id})^\alpha_\epsilon)^{-1} = (\mathrm{Id})^\beta_\epsilon A((\mathrm{Id})^\beta_\epsilon)^{-1} = (\mathrm{Id})^\beta_\epsilon A(\mathrm{Id})^\epsilon_\beta.$$

We vermenigvuldigen de meest rechtse en meest linkse matrix in de bovenstaande gelijkheid met e_1 (de eerste standaard basis vector van $\mathbb{R}^n$), en verkrijgen dat

$$(\mathrm{Id})^\alpha_\epsilon A(\mathrm{Id})^\epsilon_\alpha e_1 = (\mathrm{Id})^\beta_\epsilon A(\mathrm{Id})^\epsilon_\beta e_1$$

Aangezien v de eerste basis vector is van zowel α als β, is $(\mathrm{Id})^\epsilon_\alpha e_1 = (\mathrm{Id})^\epsilon_\beta e_1 = v$. We verkrijgen dus

$$(\mathrm{Id})^\alpha_\epsilon Av = (\mathrm{Id})^\beta_\epsilon Av.$$

Per definitie zijn de α coordinaten van Av gelijk aan $(0, 1, 0, \ldots, 0)$ (omdat Av de tweede basis vector is uit de basis α), terwijl de β coordinaten van Av gelijk zijn aan $(0, -1, 0, \ldots, 0)$. Dit is een tegenspraak, en dus bestaat er wel een λ zodat $A = \lambda\mathbb{I}_n$.

b. Deze uitspraak is fout. Neem bijvoorbeeld $V = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \mathrm{vct}(\{(1,0)\})$, $U_2 = \mathrm{vct}(\{(0,1)\})$, $U_3 = \mathrm{vct}(\{(1,1)\})$. Dan geldt dat

$$U_2 + U_3 = \mathrm{vct}(\{(1,0),(1,1)\}) = V,$$

aangezien $\{(1,0),(1,1)\}$ duidelijk voortbrengend is voor V. Dus is

$$U_1 \cap (U_2 + U_3) = U_1 \cap V = U_1.$$

Maar $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Om dit te zien nemen we een $v \in U_1 \cap U_2$. Dit betekent per definitie van U_1 en U_2 dat er een λ_1 en λ_2 bestaan zodat $v = \lambda_1(1,0) = \lambda_2(0,1)$. Maar dit alleen mogelijk als $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, en dus $v = 0$. Op dezelfde manier vinden we dat $U_1 \cap U_3 = \{0\}$, en dus

$$U_1 \cap U_2 + U_1 \cap U_3 = \{0\} + \{0\} = \{0\}.$$

c. Deze uitspraak is waar. We passen het deelruimte criterium toe op de gegeven deelverzameling, die we noteren met U.

• *U is niet leeg*: Zij $\mathbf{0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de nulfunctie. Dan geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$ dat

$$\mathbf{0}(x) = 0 = \mathbf{0}(x^3),$$

en dus $\mathbf{0} \in U$.

• *voor alle $f_1, f_2 \in U$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ geldt dat $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in U$*: Zij $x \in \mathbb{R}$ willekeurig. Dan geldt dat

$$\begin{aligned}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) &= (\lambda_1 f_1)(x) + (\lambda_2 f_2)(x) \\ &= \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \\ &\overset{f_1,f_2 \in U}{=} \lambda_1 f_1(x^3) + \lambda_2 f_2(x^3) \\ &= (\lambda_1 f_1)(x^3) + (\lambda_2 f_2)(x^3) \\ &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x^3),\end{aligned}$$

en dit betekent precies dat $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in U$.

Vraag 3

Merk op dat

$$\dim \mathrm{vct}(\{(a^2, a, 1), (0,0,b), (a, -a, 1)\}) = \dim C(M),$$

waar

$$M = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & a \\ a & 0 & -a \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

Om de dimensie van de kolom ruimte van M te bepalen voeren we rijoperaties uit en tellen het aantal gebonden variabelen.

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & a \\ a & 0 & -a \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \underset{\rightarrow}{R_3 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ a & 0 & -a \\ a^2 & 0 & a \end{pmatrix} \underset{\rightarrow}{\substack{R_2 \to R_2 - aR_1 \\ R_3 \to R_3 - a^2 R_1}} \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & -ab & -2a \\ 0 & -a^2 b & a - a^2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\rightarrow}{R_3 \to R_3 - aR_2} \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & -ab & -2a \\ 0 & 0 & a + a^2 \end{pmatrix}$$

Om verder te gaan nemen we nu eerst aan dat $a = 0$. Dan vinden we

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

en dit heeft maar 1 gebonden variabele, en dus: *als* $a = 0$, *dan* $\dim C(M) = 1$.

Neem nu dus aan dat $a \neq 0$. Dan gaan we verder met rijoperaties en vinden:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & -ab & -2a \\ 0 & 0 & a + a^2 \end{pmatrix} \substack{R_2 \to \frac{1}{a} R_2 \\ R_3 \to \frac{1}{a} R_3} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & -b & -2 \\ 0 & 0 & a + 1 \end{pmatrix}$$

Om verder te gaan nemen we aan dat $a = -1$. Dan vinden we

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & -b & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Onafhankelijk van de waarde van b zijn er 2 gebonden variabelen (welke twee variabelen dit zijn hangt wel af van de waarde van b). We concluderen: *als* $a = -1$ *dan* $\dim C(M) = 2$.

Neem nu dus aan dat $a \neq 0$ en $a \neq -1$. Dan gaan we verder met rij operaties:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & -b & -2 \\ 0 & 0 & a + 1 \end{pmatrix} R_3 \to \tfrac{1}{a+1} R_3 \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & -b & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nu zien we meteen dat als $b \neq 0$, er 3 gebonden variabelen zijn, en als $b = 0$ zijn er 2 gebonden variabelen. Samenvattend hebben we gevonden dat

$$\dim C(M) = \begin{cases} 1 & \text{als } a = 0 \\ 2 & \text{als } a = -1 \\ 2 & \text{als } a \neq 0 \text{ en } a \neq -1 \text{ en } b = 0 \\ 3 & \text{anders.} \end{cases}$$