Oplossing Tussentijdse toets Wiskunde II

Vraag 1 Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$$

met kolomvectoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ p \end{pmatrix}$$

met p een vast reëel getal.

(a) Voor welke $p \in \mathbb{R}$ zijn de vectoren lineair afhankelijk?

(b) Bereken de oppervlakte van het parallellogram dat opgespannen wordt door $\vec{b}$ en $\vec{c}$. Voor welke p is deze oppervlakte minimaal?

(c) Geef alle oplossingen $\vec{x} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T$ van

$$A\vec{x} = A^T\vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

waarin A^T de getransponeerde matrix is.

Antwoord:

(a) De drie vectoren zijn lineair afhankelijk als en slechts als

$$\det \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} = 0.$$

De determinant is gelijk aan $4p - 12$ en dus zijn de vectoren lineair afhankelijk voor $p = 3$.

(b) De oppervlakte van het parallellogram dat opgespannen wordt door $\vec{b}$ en $\vec{c}$ wordt gegeven door $\left|\vec{b} \times \vec{c}\right|$. We berekenen het vectorproduct

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 2p - 4 \\ p \\ -4 \end{pmatrix}.$$

De oppervlakte is dan gelijk aan

$$\left|\vec{b} \times \vec{c}\right| = \sqrt{(2p-4)^2 + p^2 + (-4)^2} = \sqrt{5p^2 - 16p + 32}.$$

Om deze oppervlakte te minimaliseren moeten we $f(p) = 5p^2 - 16p + 32$ minimaliseren. We zien dat

$$f'(p) = 10p - 16$$

en dit is nul voor $p = \frac{8}{5}$. De grafiek van f is een dalparabool en bijgevolg wordt in $p = \frac{8}{5}$ een minimum bereikt. De minimale oppervlakte is $\sqrt{f(\frac{8}{5})} = \sqrt{\frac{96}{5}} = \frac{4}{5}\sqrt{30}$.

(c) Het stelsel uit onderdeel (c) kunnen we ook schrijven als

$$\left(A - A^T\right)\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

We berekenen $A - A^T$ en we zien dat we het volgende stelsel moeten oplossen

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 & | & 2 \\ 3 & 0 & 3 & | & 0 \\ 2 & -3 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

Met behulp van rijoperaties herleiden we dit stelsel tot

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & | & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Alle oplossingen worden dan gegeven door

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{met } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vraag 2 Beschouw een model voor de populatie van twee soorten virussen X en Y. Het aanwezige aantal van soort X na n weken geven we aan met x_n en dat van soort Y met y_n. We nemen aan dat de populaties zich ontwikkelen volgens de vergelijkingen

$$x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + qy_n \qquad \text{en} \qquad y_{n+1} = \frac{1}{5}x_n + y_n.$$

Hierin is $q \in \mathbb{R}$ een constante.

(a) Schrijf de vergelijkingen in matrix-vectorvorm en bereken de determinant en de eigenwaarden van de optredende matrix (als functie van q).

(b) Voor welke waarden van $q \in \mathbb{R}$ treedt exponentiële groei op en voor welke waarden sterven de populaties uit?

(c) Voor welke q is er een evenwichtspopulatie? Bereken de evenwichtspopulatie als $a_0 = 2010$ en $b_0 = 0$.

Antwoord:

(a) We kunnen de vergelijking als volgt schrijven in matrixvorm

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & q \\ \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

De determinant wordt gegeven door

$$\det \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & q \\ \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}q.$$

Vervolgens berekenen we de eigenwaarden. We stellen de karakteristieke veelterm gelijk aan 0.

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{5} - \lambda & q \\ \frac{1}{5} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{9}{5}\lambda + \frac{4}{5} - \frac{1}{5}q = 0.$$

Dit heeft als oplossingen

$$\lambda_1 = \frac{9 + \sqrt{1 + 20q}}{10} \qquad \text{en} \qquad \lambda_2 = \frac{9 - \sqrt{1 + 20q}}{10}$$

(b) Om te onderzoeken wanneer de populaties uitsterven moeten we op zoek naar de waarden van q waarbij $|\lambda_1| < 1$ en $|\lambda_2| < 1$. We maken hierbij onderscheid tussen waarden van q waarvoor de eigenwaarden reëel zijn en waarden van q waarvoor de eigenwaarden niet reëel zijn. Vanwege de vierkantswortel $\sqrt{1 + 20q}$ in de formule voor λ_1 en λ_2 treedt de overgang tussen deze twee gevallen op bij $q = -\frac{1}{20}$.

Geval $q \geq -\frac{1}{20}$ In dit geval zijn de eigenwaarden reëel. Het is eenvoudig in te zien dat $\lambda_1 > 0$ en

$$|\lambda_2| = \frac{|9 - \sqrt{1+20q}|}{10} \leq \frac{9 + \sqrt{1+20q}}{10} = \lambda_1.$$

Als dus $\lambda_1 < 1$ dan volgt zeker $|\lambda_2| < 1$ en het is dus voldoende om alleen λ_1 te onderzoeken.
Als functie van $q \geq -\frac{1}{20}$ is λ_1 een strikt stijgende functie. De vergelijking $\lambda_1 = 1$ heeft $q = 0$ als oplossing. Dus $\lambda_1 < 1$ geldt voor

$$q \in [-\tfrac{1}{20}, 0[$$

indien we in het eerste geval zitten.

Geval $q < -\frac{1}{20}$ Als $q < -\frac{1}{20}$ dan is $1 + 20q < 0$ en dan zijn λ_1 en λ_2 niet reëel. Ze zijn dan elkaars complex toegevoegde met dezelfde absolute waarde

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \left|\frac{9 \pm i\sqrt{-1-20q}}{10}\right| = \frac{1}{10}\sqrt{9^2 + (-1-20q)}.$$

Dit is kleiner dan 1 als en slechts als $9^2 - 1 - 20q < 100$, hetgeen neerkomt op $-20q < 100 - 81 + 1 = 20$ ofwel $q > -1$. Dus $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$ geldt voor

$$q \in]-1, -\tfrac{1}{20}].$$

Als we de twee gevallen combineren vinden we dat $|\lambda_1| < 1$ en $|\lambda_2| < 1$ geldt voor

$$q \in]-1, 0[.$$

In dat geval sterft de populatie uit.

Als $q > 0$ dan is $\lambda_1 > 1$ en dan treedt exponentiële groei op.

Als $q < -1$ dan geldt $|\lambda_1| = |\lambda_2| > 1$ en treedt ook exponentiële groei op.

Als $q = 0$ dan is $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = \frac{4}{5} < 1$. Dan is er een evenwichtspopulatie.

Als $q = -1$ dan geldt $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, maar 1 is geen eigenwaarde. Er is dan een oscillerend gedrag maar geen evenwichtspopulatie.

N.B. Als $q < 0$ dan zal het voorkomen dat x_n en y_n negatief worden voor zekere n. In dat geval is het model voor de populatie van virussen in feite niet relevant.

(c) Als $q = 0$, dan is $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = \frac{4}{5}$. We bepalen eigenvectoren bij deze eigenwaarden.
Een eigenvector bij $\lambda_1 = 1$ is $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Een eigenvector bij $\lambda_2 = \frac{4}{5}$ is $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Om de evenwichtspopulatie te berekenen moeten we $\vec{x_0}$ schrijven als lineaire combinatie van de twee eigenvectoren. We gaan dus op zoek naar c_1 en c_2 zodat

$$\begin{pmatrix} 2010 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dit leidt tot een stelsel lineaire vergelijkingen voor c_1 en c_2 met als oplossing $c_1 = c_2 = 2010$.
De oplossing van het populatiemodel is dan

$$c_1 \lambda_1^n \vec{v_1} + c_2 \lambda_2^n \vec{v_2} = 2010 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2010 \left(\tfrac{4}{5}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Voor $n \to \infty$ gaat dit naar de evenwichtspopulatie

$$c_1 \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2010 \end{pmatrix}.$$

Vraag 3 (niet voor geografie)

(a) Bereken de Maclaurinreeks van de functie

$$f(x) = \ln(1 + 2x^2)$$

Wat is de convergentiestraal van deze Maclaurinreeks?

(b) Bereken de Fourierreeks van de 2π -periodieke functie g die op $[-\pi, \pi]$ gegeven wordt door

$$g(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Antwoord:

(a) Om de Maclaurinreeks op te stellen van f gebruiken we de gekende Maclaurinreeks van $\ln(1 + x)$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k, \qquad |x| < 1.$$

We vervangen hierin x door $2x^2$ en we vinden

$$\begin{aligned} \ln(1+2x^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(2x^2)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}2^k}{k} x^{2k} \\ &= 2x^2 - \frac{4}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^6 - \frac{16}{4}x^8 + \cdots \end{aligned}$$

De Maclaurinreeks voor $\ln(1 + x)$ convergentiestraal 1 en is bijgevolg convergent voor $|x| < 1$. We mogen x vervangen door $2x^2$ als $|2x^2| < 1$, hetgeen betekent dat $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. De convergentiestraal van de Maclaurinreeks voor $f(x)$ is gelijk aan $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) De Fourierreeks van een 2π-periodieke functie g is

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

met

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\, dx \qquad \text{en} \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\, dx.$$

De functie g uit de opgave is een even functie. Hierdoor volgt dat $b_n = 0$ en

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\cos nx\, dx.$$

We berekenen nu a_0 en a_n met $n \in \mathbb{N}_0$.
Er geldt

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{4}{\pi}$$

en voor $n \in \mathbb{N}_0$ (waarbij we gebruik maken van de formule van Simpson voor een product van twee goniometrische functies)

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos nx \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos\left(\frac{1+2n}{2} x\right) + \cos\left(\frac{1-2n}{2} x\right) \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{1+2n} \sin\left(\frac{1+2n}{2} x\right) + \frac{2}{1-2n} \sin\left(\frac{1-2n}{2} x\right) \right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{1+2n} \sin\left(\frac{1+2n}{2} \pi\right) + \frac{2}{1-2n} \sin\left(\frac{1-2n}{2} \pi\right) \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{1+2n} \sin\left(\frac{1}{2}\pi + n\pi\right) + \frac{2}{1-2n} \sin\left(\frac{1}{2}\pi - n\pi\right) \right].
\end{aligned}$$

Voor een geheel getal $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi + k\pi) = \begin{cases} 1 & \text{als } k \text{ even is} \\ -1 & \text{als } k \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Als n even is dan geldt dus dat $\sin\left(\frac{1}{2}\pi + n\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - n\pi\right) = 1$ en

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{1+2n} + \frac{2}{1-2n} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{4}{1-4n^2} \qquad \text{als } n \text{ even is.}$$

Als n oneven is dan geldt $\sin\left(\frac{1}{2}\pi + n\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - n\pi\right) = -1$ en

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{2}{1+2n} - \frac{2}{1-2n} \right) = -\frac{1}{\pi} \frac{4}{1-4n^2} \qquad \text{als } n \text{ oneven is.}$$

De twee gevallen kunnen we samennemen door

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{\pi} \frac{4}{1-4n^2} \qquad \text{als } n \in \mathbb{N}_0.$$

De Fourierreeks wordt uiteindelijk

$$g(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} \cos(nx).$$