PROEFEXAMEN LINEAIRE ALGEBRA
dinsdag 27 november 2018

Vraag 1

Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte en $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ een deelverzameling van m vectoren uit V. Bewijs het lemma van Steinitz: als A voortbrengend is voor V, dan is een willekeurige deelverzameling van V met meer dan m elementen lineair afhankelijk.

Vraag 2

Waar of fout? Toon aan of geef een tegenvoorbeeld.

(a) Zij $n > 1$. De verzameling $\{M \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(M) = 0\}$ is een deelruimte van $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Oplossing. De bewering is fout. Neem bijvoorbeeld $n = 2$ en beschouw de matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ en } M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Er geldt duidelijk dat $\det(M_1) = 0 = \det(M_2)$ dus zijn M_1 en M_2 elementen van de gegeven deelverzameling van $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Maar $M_1 + M_2 = \mathbb{I}_2$ en $\det(\mathbb{I}_2) = 1 \neq 0$ en dus is $M_1 + M_2$ geen element van de gegeven deelverzameling. De verzameling voldoet dus niet aan het deelruimtecriterium.

(b) De verzameling $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \text{ voor alle } x \in \mathbb{R} \text{ geldt dat } f(x) = f(x^3)\}$ is een deelruimte van de vectorruimte van functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$.

Oplossing. De bewering is juist. We gaan het deelruimtecriterium na. Ten eerste is de verzameling niet leeg, elke constante functie voldoet aan de voorwaarde $f(x) = f(x^3)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Neem nu $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ willekeurig en veronderstel dat zowel $f_1(x) = f_1(x^3)$ als $f_2(x) = f_2(x^3)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. We moeten nu bewijzen dat

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x^3)$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dit volgt uit de volgende berekeningen.

$$\begin{aligned}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) &= \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \\ &= \lambda_1 f_1(x^3) + \lambda_2 f_2(x^3) \qquad (f_1(x) = f_1(x^3) \text{ en } f_2(x) = f_2(x^3)) \\ &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x^3)\end{aligned}$$

Opmerking. Deze deelruimte bestaat niet enkel uit de constante functies. Stel bijvoorbeeld $f(1) = 10$ en $f(x) = 0$ als $x \neq 1$.

(c) Zij $U_1, U_2 \subset V$ deelruimten zodat $V = U_1 \oplus U_2$. Zij $W \subset V$ een derde deelruimte. Dan is $W = (U_1 \cap W) \oplus (U_2 \cap W)$.

Oplossing. De bewering is fout. Stel bijvoorbeeld $V = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \operatorname{vct}\{(1, 0)\}$ en $U_2 = \operatorname{vct}\{(0, 1)\}$. Duidelijk geldt dat $\mathbb{R}^2 = U_1 \oplus U_2$. Neem nu $W = \operatorname{vct}\{(1, 1)\}$. We bekomen dan duidelijk een tegenspraak:

$$(U_1 \cap W) \oplus (U_2 \cap W) = \{0\} \oplus \{0\} = \{0\} \neq W.$$

Vraag 3

Zij $a, b \in \mathbb{R}$ en beschouw de volgende verzameling:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2b & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Voor welke waarden van a en b is deze verzameling een basis voor de vectorruimte $\mathbb{R}^{2\times 2}$?

Oplossing. We moeten nagaan wanneer de gegeven verzameling basis is, dat wil zeggen: vrij en voortbrengend. Omdat $\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$, is het wegens stelling 3.44 (p.113) voldoende om na te gaan voor welke a en b de verzameling vrij of voortbrengend is. (Het is uiteraard niet verkeerd om deze beide te bewijzen.) Voor de volledigheid zullen wij hier beide aantonen.

- We onderzoeken eerst wanneer de verzameling vrij is. Hiervoor moeten we nagaan of er x, y, z en $u \in \mathbb{R}$ bestaan zodat:

$$x \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dit levert het volgende *homogene* stelsel op:

$$\begin{cases} ax + 0y + 0z + au &= 0 \\ ax + ay + 0z + 0u &= 0 \\ 0x + 0y + bz + 2bu &= 0 \\ 0x + by + bz + 0u &= 0 \end{cases}$$

of in matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 2b \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix}.$$

We brengen deze matrix in de trapvorm:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 2b \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 & -a \\ 0 & 0 & b & 2b \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 & -a \\ 0 & b & b & 0 \\ 0 & 0 & b & 2b \end{pmatrix}.$$

Wanneer $a = 0$, bekomen we twee nulrijen en heeft het stelsel oneindig veel oplossingen. Er is met andere woorden een niet triviale lineaire combinatie van de vier matrices om de nulmatrix te bekomen, i.e. de verzameling is niet vrij. Stel nu $a \neq 0$ dan kunnen we verder rekenen:

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{b}{a} R_2} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 & -a \\ 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & b & 2b \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 & -a \\ 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Het stelsel heeft een *unieke* oplossing (zijnde de triviale oplossing) als en slechts als $a \neq 0$ en $b \neq 0$, m.a.w. wanneer $ab \neq 0$. In dit geval is de gegeven verzameling dus vrij.

- Ten slotte bekijken we voor welk waarden van a en b de verzameling voortbrengend is. We moeten aantonen dat voor een willekeurige matrix $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ er x, y, z en $u \in \mathbb{R}$ bestaan zodat:

$$x\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}.$$

Dit levert het volgende stelsel op:

$$\begin{cases} ax + 0y + 0z + au & = m_{11} \\ ax + ay + 0z + 0u & = m_{12} \\ 0x + 0y + bz + 2bu & = m_{21} \\ 0x + by + bz + 0u & = m_{22} \end{cases}$$

en dus in matrixvorm:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 0 & a & m_{11} \\ a & a & 0 & 0 & m_{12} \\ 0 & 0 & b & 2b & m_{21} \\ 0 & b & b & 0 & m_{22} \end{array}\right).$$

We herleiden de matrix opnieuw tot een trapvorm:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 0 & a & m_{11} \\ a & a & 0 & 0 & m_{12} \\ 0 & 0 & b & 2b & m_{21} \\ 0 & b & b & 0 & m_{22} \end{array}\right) &\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 0 & a & m_{11} \\ 0 & a & 0 & -a & m_{12} - m_{11} \\ 0 & 0 & b & 2b & m_{21} \\ 0 & b & b & 0 & m_{22} \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 0 & a & m_{11} \\ 0 & a & 0 & -a & m_{12} - m_{11} \\ 0 & b & b & 0 & m_{22} \\ 0 & 0 & b & 2b & m_{21} \end{array}\right). \end{aligned}$$

Veronderstel dat $a = 0$. Omdat M willekeurig is, in het bijzonder m_{11}, volgt dat in het algemeen het stelsel dan strijdig zou zijn en dus de gegeven verzameling niet voortbrengend. Neem dus aan dat $a \neq 0$, dan:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 0 & a & m_{11} \\ 0 & a & 0 & -a & m_{12} - m_{11} \\ 0 & b & b & 0 & m_{22} \\ 0 & 0 & b & 2b & m_{21} \end{array}\right) &\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{b}{a}R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 0 & a & m_{11} \\ 0 & a & 0 & -a & m_{12} - m_{11} \\ 0 & 0 & b & b & m_{22} - \frac{b}{a}(m_{12} - m_{11}) \\ 0 & 0 & b & 2b & m_{21} \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 0 & a & m_{11} \\ 0 & a & 0 & -a & m_{12} - m_{11} \\ 0 & 0 & b & b & m_{22} - \frac{b}{a}(m_{12} - m_{11}) \\ 0 & 0 & 0 & b & m_{21} - m_{22} + \frac{b}{a}(m_{12} - m_{11}) \end{array}\right). \end{aligned}$$

Wanneer $b = 0$ zien we dat het stelsel in het algemeen ook strijdig is omdat M willekeurig is. We vinden opnieuw dat de verzameling voortbrengend is als en slechts als $ab \neq 0$ ofwel $a \neq 0$ en $b \neq 0$. (We raden af om de matrix verder te reduceren vermits de 5de kolom dan zeer lange uitdrukkingen zou bevatten.)

Opmerkingen.

(a) Men kan ook de determinant berekenen van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 2b \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix}.$$

Inderdaad, als de determinant van A verschillend is van nul, dan heeft het stelsel $AX = B$ een unieke oplossing voor alle $B \in \mathbb{R}^4$. (Hier moet je dus eerst een coördinaatsafbeelding $\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ voor beschouwen.) In het bijzonder volgt dat de kolommen van A voortbrengend en lineair onafhankelijk zijn.

(b) Men kan ook de rijruimte (of kolomruimte) van de matrix A bepalen (of een matrix bekomen door de gegeven matrices te schrijven t.o.v. een andere basis voor $\mathbb{R}^{2\times 2}$).

(b) Vind voor deze waarden van a en b de coördinaten van $\mathbb{I}_2$ ten opzichte van deze basis.

Oplossing. Indien de gegeven verzameling een basis vormt voor $\mathbb{R}^{2\times 2}$, dan bestaan er unieke x, y, z en $u \in \mathbb{R}$ zodat:

$$x\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dit levert het volgende stelsel op:

$$\begin{cases} ax + 0y + 0z + au & = 1 \\ ax + ay + 0z + 0u & = 0 \\ 0x + 0y + bz + 2bu & = 0 \\ 0x + by + bz + 0u & = 1 \end{cases}$$

of in matrixvorm:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 0 & a & 1 \\ a & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 2b & 0 \\ 0 & b & b & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Volgen we opnieuw dezelfde stappen als in deelvraag (a), dan bekomen we:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & a & 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & b & b & 1 + \frac{b}{a} \\ 0 & 0 & 0 & b & -(1 + \frac{b}{a}) \end{array}\right).$$

Vermits $a \neq 0$ en $b \neq 0$, volgt:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{b}(-1)(1 + \frac{b}{a}) = -\frac{1}{b}\frac{a+b}{a} = -\frac{a+b}{ab}, \\ z = \frac{1}{b}(-bu + 1 + \frac{b}{a}) = \frac{1}{b}(\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{a}) = 2\frac{a+b}{ab}, \\ y = \frac{1}{a}(au - 1) = \frac{1}{a}(-\frac{a+b}{b} - \frac{b}{b}) = -\frac{a+2b}{ab}, \\ x = \frac{1}{a}(1 - au) = \frac{1}{a}(\frac{b}{b} + \frac{a+b}{b}) = \frac{a+2b}{ab}. \end{cases}$$

De coördinaten van $\mathbb{I}_2$ zijn dus $\frac{1}{ab}(a + 2b, -(a + 2b), 2(a + b), -(a + b))$. Ter controle kan je nagaan dat:

$$\frac{a+2b}{ab}\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{-(a+2b)}{ab}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} + \frac{2(a+b)}{ab}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{pmatrix} + \frac{-(a+b)}{ab}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$