Langere vraag over de theorie

(a) Arbeid om de condensator op te laden

- Bij het opladen van een condensator moet arbeid geleverd worden om lading te verplaatsen van de ene plaat naar de andere. Als er nog geen lading op de platen zit, moet er geen arbeid geleverd worden. De te leveren arbeid neemt toe naarmate er al meer lading is:

$$W = \int_0^Q V\,dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

- We kunnen dan de opgeslagen energie schrijven als

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

- Voor een condensator met twee evenwijdige platen kennen we de uitdrukking voor de capaciteit en kunnen we *U* dan herschrijven als

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right)\left(E^2 d^2\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 A d$$

(a) Overstappen naar de energiedichtheid

- We vinden dan de energiedichtheid van het elektrisch veld tussen de platen van de condensator door te delen door het volume Ad:

$$u \ = \ \text{energiedichtheid} \ = \ \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,E^2$$

- Deze uitdrukking zal blijven gelden voor eender welk elektrisch veld en algemeen kunnen we stellen dat de energie per eenheid van volume in ieder deel van de ruimte evenredig is met het kwadraat van het elektrisch veld.
- Als het elektrisch veld wordt opgebouwd in een medium met diëlektrische constante K en permittiviteit ε, dan wordt de energiedichtheid verhoogd tot

$$u \ = \ \text{energiedichtheid} \ = \ \frac{1}{2}\,K\,\varepsilon_0\,E^2 \ = \ \frac{1}{2}\,\varepsilon\,E^2$$

(b) Afstand tussen de platen verhogen

- De platen van de condensator met evenwijdige platen die een oppervlakte A hebben en die zich initieel op een afstand x_i van mekaar bevinden, worden tot op een afstand x_f van mekaar verwijderd terwijl de platen met de batterij verbonden blijven. Eerst kijken wat de initiële energie U_i en de finale energie U_f zijn die opgeslagen zitten in de condensator. De initiële capaciteit is $C_i = \varepsilon_0 A/x_i$ en de opgeslagen energie is dan

$$U_i = \frac{1}{2} C_i V^2 = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2 x_i}$$

- Wanneer de afstand tussen de platen verhoogd wordt tot x_f, wordt de capaciteit $C_f = \varepsilon_0 A/x_f$ en de opgeslagen energie wordt dan

$$U_f = \frac{1}{2} C_f V^2 = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2 x_f}$$

(b) Afstand tussen de platen verhogen, vervolg 1

- Het verschil in potentiële energie is

$$\Delta U_{\text{cap}} = U_f - U_i = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2}\left(\frac{1}{x_f} - \frac{1}{x_i}\right) < 0 \quad \text{omdat} \quad x_i < x_f$$

- De potentiële energie vermindert, wat we associëren met het weg-vloeien van lading van de platen. Anderzijds moeten we positieve arbeid W leveren om de tegengesteld geladen platen met lading $Q = CV$ en veld $E = V/\ell$ van mekaar te verwijderen. We veronderstellen dat één plaat in het veld $E = V/2\ell$ van de andere plaat beweegt:

$$W = \int_{\ell=x_i}^{\ell=x_f} QE\,d\ell = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2}\int_{x_i}^{x_f} \frac{d\ell}{\ell^2} = -\frac{\varepsilon_0 A V^2}{2\ell}\Bigg|_{\ell=x_i}^{\ell=x_f}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2}\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_f}\right) > 0 \quad \text{omdat} \quad x_i < x_f$$

(b) Afstand tussen de platen verhogen, vervolg 2

- Uit voorgaande berekeningen besluiten we dat, alhoewel er arbeid moet geleverd worden om de platen verder van mekaar te brengen, er anderzijds toch een verlaging van de potentiële energie is. Dit betekent dat er nog ergens anders energie naar toe gaat. Meer bepaald wordt er energie opgeslagen in de batterij die opgeladen wordt. De energiebalans levert

$$W = \Delta U_{\text{cap}} + \Delta U_{\text{bat}}$$

- De toename ΔU_{bat} van de energie opgeslagen in de batterij is dan

$$\Delta U_{\text{bat}} = W - \Delta U_{\text{cap}} = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2}\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_f}\right) - \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2}\left(\frac{1}{x_f} - \frac{1}{x_i}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon_0 A V^2}{x_i} - \frac{\varepsilon_0 A V^2}{x_f} = \varepsilon_0 A V^2 \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_f}\right)$$

Oefening

a) Toon aan dat $\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Er geldt dat $\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dx}\right) = -\frac{dE}{dx}$

Gebruik nu de wet van Gauss. Het Gaussoppervlak is een balk tussen de platen

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

want $\vec{E}$ // andere zijvlakken van de balk

$$E \cdot A_{grondvlak} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot A = \frac{\int \rho(x)\, dV}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot \cancel{A} = \frac{\int \rho(x)\, \cancel{A}\, dx}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\int \rho(x)\,dx}{\varepsilon_0}$$

Dus $\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{-dE}{dx} = \frac{-d}{dx}\left(\frac{\int \rho(x)\,dx}{\varepsilon_0}\right)$

$$\boxed{\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

b) Wat is de snelheid op een afstand x, wanneer de potentiaal gegeven wordt door V(x)?

Pas behoud van energie toe

$$qV = \frac{mv^2}{2}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}}$$

Hier is q de lading van een elektron, d.i. e.

c) Wat is de relatie tussen ρ en v?

I = constant

$$Q = \rho \cdot V$$

$$dq = \rho A\,dx$$

$$\frac{dq}{dt} = \rho A \frac{dx}{dt}$$

$$\boxed{I = \rho A v} = n e A v$$

d) Gebruik voorgaande resultaten om een differentiaalvergelijking voor V te verkrijgen.

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{-\rho}{\varepsilon_0} = \frac{-I}{A v \varepsilon_0} = \frac{-I}{\varepsilon_0 A}\sqrt{\frac{m}{2qV}}$$

$$\boxed{\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{-I}{\varepsilon_0 A}\sqrt{\frac{m}{2q}}\; V^{-1/2}}$$ (*)

e) Toon aan dat $V(x) = \left(\frac{81 I^2 m}{32 \varepsilon_0^2 A^2 q}\right)^{1/3} x^{4/3} = V_0 \left(\frac{x}{d}\right)^{4/3}$ een oplossing is van de diffvgl en vind $\rho(x)$ en $v(x)$.

$$V = \left(\frac{81 I^2 m}{32 \varepsilon_0^2 A^2 q}\right)^{1/3} x^{4/3}$$

$$\frac{dV}{dx} = \left(\frac{81 I^2 m}{32 \varepsilon_0^2 A^2 q}\right)^{1/3} \frac{4}{3} x^{1/3}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \left(\frac{81 I^2 m}{32 \varepsilon_0^2 A^2 q}\right)^{1/3} \frac{4}{9} x^{-2/3} \rightarrow \text{vul in in } A$$

$$\left(\frac{81 I^2 m}{32 \varepsilon_0^2 A^2 q}\right)^{1/3} \frac{4}{9} \cancel{x^{-2/3}} = \frac{-I}{\varepsilon_0 A} \sqrt{\frac{m}{2q}} \left(\frac{81 I^2 m}{32 \varepsilon_0^2 A^2 q}\right)^{-1/6} \cancel{x^{-2/3}}$$

$$\left(\frac{81 I^2 m}{32 \varepsilon_0^2 A^2 q}\right)^{1/2} \frac{4}{9} = \frac{-I}{\varepsilon_0 A} \sqrt{\frac{m}{2q}}$$

$$\sqrt{\frac{\cancel{81}\,\cancel{I^2}\,\cancel{m}\,16 \cdot 2\cancel{q}\,\cancel{\varepsilon_0^2 A^2}}{\cancel{32}\,\cancel{\varepsilon_0^2 A^2}\,\cancel{q} \cdot \cancel{81} \cdot \cancel{m} \cdot \cancel{I^2}}} = 1$$

$\rho(x) = ?$

$$\rho(x) = -\varepsilon_0 \frac{d^2V}{dx^2}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{4V_0}{9d^{4/3}} \cdot x^{-2/3}$$

$$\boxed{\rho(x) = \frac{-4\varepsilon_0 V_0}{9\,d^{4/3}}\, x^{-2/3}}$$

$v(x) = ?$

$$v(x) = \sqrt{\frac{2q}{m}} \cdot \sqrt{V}$$

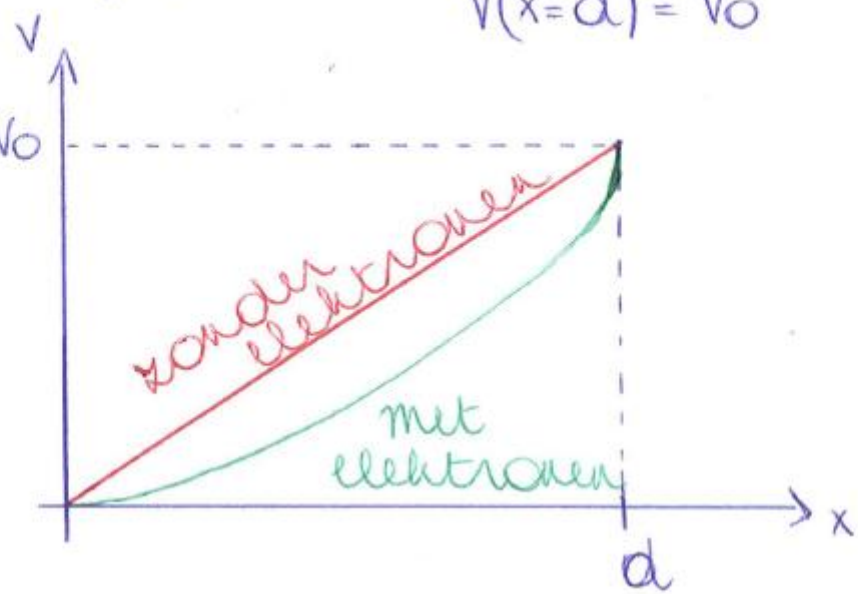
$$\boxed{v(x) = \sqrt{\frac{2qV_0}{m}} \left(\frac{x}{d}\right)^{2/3}}$$

f) Vergelijk met wanneer er geen elektronen tussen de platen zitten en teken het verloop van beiden.

$$V = V_0 \left(\frac{x}{d}\right)^{4/3}$$

$$V(x=0) = 0$$

$$V(x=d) = V_0$$



zonder elektronen:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2V}{dx^2} = 0 \; (= \rho) \\ \dfrac{dV}{dx} = E = \text{constante} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ rechte met

$$\begin{cases} V(0) = 0 \\ V(d) = V_0 \end{cases}$$

4 korte vragen

(1) Lading op holle sfeer: antwoord is oplossing (e)

- Omwille van het elektrostatisch evenwicht moet het veld $E = 0$ in het metaal tussen de binnenkant A en de buitenkant B van de holle sfeer.
- Voordat de aarding wordt aangebracht zal de positieve lading q in het centrum op de binnenkant A een negatieve lading $-q$ induceren die homogeen verdeeld zit over de binnenkant. Omwille van het behoud van lading komt er dan op de buitenkant B een positieve lading q te zitten die eveneens homogeen verdeeld zit over de buitenkant.
- Na het aanbrengen van de aarding moet de potentiaal $V = 0$ worden op de buitenkant B. Omwille van het elektrostatisch evenwicht mag er dan geen elektrisch veld opgebouwd worden tussen de buitenkant van de sfeer en de aarde. Vanuit de aarde worden daartoe vrije elektronen aangevoerd tot de positieve lading perfect gecompenseerd is.
- Na het aanbrengen van de aarding is de potentiaal V overal nul als we ons buiten de binnenkant A begeven. Het verwijderen van de aarding laat de ladingsverdeling dan ongewijzigd. $\rightarrow$ Antwoord (e) is correct.

(2) Lading op condensator: antwoord is oplossing (b)

- De condensatoren C_2 en C_3 staan in parallel en kunnen vervangen worden door een equivalente condensator met capaciteit $C_{\mathrm{par}} = C_2 + C_3 = 10\ \mu\mathrm{F} + 30\ \mu\mathrm{F} = 40\ \mu\mathrm{F}$.
- De condensator C_{par} staat op zijn beurt in serie met de condenstor C_1 zodat de equivalente capaciteit voor het totale circuit gegeven wordt door $(1/C_{\mathrm{eq}})^{-1} = (1/C_1)^{-1} + (1/C_{\mathrm{par}})^{-1}$. We vinden dan dat $C_{\mathrm{eq}} = 40/3\ \mu\mathrm{F}$.
- De lading Q die opgeslagen zit in het circuit wordt gegeven door $Q = C_{\mathrm{eq}}V = 40/3 \times 18\ \mu\mathrm{C} = 240\ \mu\mathrm{C}$. Vermits we weten dat voor een serie-schakeling van twee condensatoren de lading op beide condensatoren dezelfde is, zal de lading op de condensator C_1 ook gelijk zijn aan $240\ \mu\mathrm{C} = 0.24\ \mathrm{mC}$. $\rightarrow$ Antwoord (b) is correct.

(3) Onbekende weerstand bij de brug van Wheatstone

- Als de brug in evenwicht is loopt er geen stroom tussen de punten B en D zodat $V_B = V_D$. Hieruit volgt dan dat het potentiaalverschil $V_B - V_A$ gelijk is aan het potentiaalverschil $V_D - V_A$. We hebben daarnaast ook dat het potentiaalverschil $V_C - V_B$ gelijk is aan het potentiaalverschil $V_C - V_D$.
- Door toepassing van de wet van Ohm krijgen we dan volgende vergelijkingen:

$$R_1 I_1 = R_3 I_3 \quad \text{en} \quad R_2 I_1 = R_x I_3$$

- Hierbij hebben we gebruik gemaakt van het feit dat dezelfde stroom I_1 loopt door de weerstanden R_1 en R_2 en dat dezelfde stroom I_3 loopt door de weerstanden R_3 en R_x. Uit twee bovenstaande vergelijkingen leiden we het gezochte resultaat af:

$$I_1 = \frac{R_3 I_3}{R_1} \quad \Rightarrow \quad R_2 \frac{R_3 I_3}{R_1} = R_x I_3 \quad \Rightarrow \quad R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

(4) Demonstratie van het Joule-effect

- Het experiment dat wordt beschreven in deze vraag, hebben we uitgevoerd tijdens de les op maandag 3 maart in de namiddag.
- Het opwarmen van de draden is een gevolg van het Joule-effect, dit is de ontwikkeling van warmte die optreedt als we een hoge stroom sturen door een weerstand. Als R_1 de weerstand is van draad 1 en R_2 de weerstand van draad 2 dan zijn de ontwikkelde vermogens

$$P_1 = R_1 I_1^2 \quad \text{en} \quad P_2 = R_2 I_2^2$$

- Daar beide draden in serie staan, vloeit er dezelfde stroom door: $I_1 = I_2 = I$. Het feit dat er veel meer warmte wordt ontwikkeld in draad 2, betekent dan dat de weerstand van draad 2 veel groter moet zijn dan die van draad 1. Als de draden dezelfde afmetingen hebben, betekent dit dat de draad 2 een veel grotere resistiviteit moet hebben dan draad 2. [Voor het experiment in de les was draad 1 vervaardigd uit koper, terwijl draad 2 vervaardigd was uit ijzer].

(4) Demonstratie van het Joule-effect, vervolg

- Het bepalen van de ontwikkelde vermogens doen we als volgt:
  - Het aangelegde spanningsverschil ΔV lezen we af op de bron en de stroom I die door beide draden loopt, lezen we af op de stroommeter. We kennen dan de som van de weerstanden (wet van Ohm):

$$R_1 + R_2 = \frac{\Delta V}{I}$$

  - De wet van Ohm levert ook de weerstand van draad 2 daar de voltmeter het spanningsverschil ΔV_2 over deze draad geeft:

$$R_2 = \frac{\Delta V_2}{I}$$

Daar we nu de som van beide weerstanden kennen en ook de weerstand van draad 2, kunnen we dan de weerstand van draad 1 bepalen. De ontwikkelde vermogens berekenen we uit $P = RI^2$.