Differentiaalvergelijkingen 2020-2021
Oplossingen Oefeningentoets

Vraag 1: Beschouw het volgende stelsel van differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \tag{1}$$

met A gegeven als

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

en beginvoorwaarde

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

a) *(2.5 pt.)* Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van dit stelsel.

b) *(1.5 pt.)* Als $A = PDP^{-1}$, met P de matrix met eigenvectoren, bereken dan de exponentiele matrix e^{Dt}. (je hoeft hiervoor P en P^{-1} niet expliciet te berekenen).

c) *(1 pt.)* Bepaal de oplossing voor het beginwaardeprobleem.

Oplossing

a) De eigenwaarden zijn af te lezen van de matrix en zijn:

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = 2$$

Voor $\lambda_1 = 3$ vinden we de eigenvector

$$v_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 4\alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \rightarrow \alpha = 1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voor de eigenwaarde 2 moeten we een Jordanketen opbouwen. De eigenvectoren die we terugvinden zijn

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \\ -0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) De diagonaal D kunnen we opstellen zoals in de cursus:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

De exponentiele matrix kunnen we vinden door de matrix op te splitsen in het diagonaal deel Δ en het niet-diagonaal deel S. De exponent van een diagonale matrix is gelijk aan de exponent van de matrix-elementen. Het niet-diagonale deel kunnen we vinden door de exponent te schrijven als

$$e^{St} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^n t^n}{n!}$$

Hierbij merken we dat $S^n = 0$ als $n > 4$, dus de oneindige integraal word een eindige som van matrixmachten. Zo vinden we de eindoplossing

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} & \frac{t^3}{6}e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

c) De eindoplossing is gegeven door

$$x(t) = e^{At}x_0 = Pe^{Dt}P^{-1}x_0$$

De berekening kan vereenvoudigd worden door het in stappen op te splitsen. Eerst bereken je $P^{-1}x_0$, dan $e^{Dt}P^{-1}x_0$ en vervolgens $Pe^{Dt}P^{-1}x_0$. De matrix P en zijn inverse zijn gegeven door

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De eindoplossing is gegeven door

$$x(t) = Pe^{Dt}P^{-1}x_0 = \begin{pmatrix} (2t + \frac{t^2}{2})e^{2t} \\ te^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vraag 2: Bekijk de differentiaal vergelijking met *twee parameters:* $\alpha \in \mathbb{R}$ en $m \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$$(1 - x^2)y''(x) - (\alpha + 1)xy'(x) + m(m + \alpha)y(x) = 0,$$

met de volgende machtreeksoplossing

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

a) *(2 pt.)* Vind de recursie waar de coefficienten a_n aan voldoen.

b) *(1.5 pt.)* Het aantal onafhankelijke *veelterm*oplossingen dat we hebben hangt af van de parameters in de differentiaal vergelijking. Voor welke α hebben we twee onafhankelijke veeltermoplossingen?

c) *(1.5 pt.)* Neem nu aan dat $\alpha = 4$ en $m = 2$. Schrijf expliciet de coefficienten op van twee onafhankelijke oplossingen.

Oplossing

We beginnen dus met

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Dan hebben we

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n,$$

en

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \qquad x^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n.$$

Als we nu alles in de vergelijking stoppen, krijgen we

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big(n(n-1)a_n x^{n-2} - n(n-1)a_n x^n - (\alpha+1)n a_n x^n + m(m+\alpha)a_n x^n \big) = 0.$$

Dit kunnen we een beetje versimpelen door het wat verder uit te schrijven

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big(n(n-1)a_n x^{n-2} - (n^2 + \alpha n - (m^2 + \alpha m))a_n x^n \big) = 0.$$

(a) Alle termen hebben machten van x vanaf x^0. Dus geldt voor alle $n \geq 0$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = (n^2 + \alpha n - (m^2 + \alpha m))a_n.$$

(b) Het rechter lid wordt 0 als $n = m$ of als $n = -m - \alpha$. Dus we hebben in elk geval dat $a_{m+2} = 0$ en dus ook $a_{m+2k} = 0$ voor $k \in \mathbb{N}$. Dat geeft ons dus alvast één veeltermoplossing.

Maar als $-\alpha - m \in \mathbb{N}$, dan hebben we ook nog dat $a_{-m-\alpha+2} = 0$ en dus ook $a_{-m-\alpha+2k} = 0$. Dat zou de reeks van de tweede oplossing kunnen afbreken en nog een veelterm geven, maar het zou ook *dezelfde* reeks kunnen afbreken! Dan hebben we dus nog steeds maar één veeltermoplossing. Voor twee verschillende willen we dus dat als m even is dat $-m-\alpha$ oneven is en andersom. Dat hebben we precies als α oneven is.

Samenvattend: Als we ook een tweede veeltermoplossing willen, moet α geheel zijn, oneven en strict kleiner dan $-m$.

(c) Neem

$$a_{n+2} = \frac{n^2 + \alpha n - (m^2 + \alpha m)}{(n+2)(n+1)} a_n,$$

met $\alpha = 4$ en $m = 2$

$$a_{n+2} = \frac{n^2 + 4n - 12}{(n+2)(n+1)} a_n.$$

dus voor $n \geq 2$

$$a_n = \frac{n^2 - 16}{n(n-1)} a_{n-2}.$$

Dat betekent dus dat $a_{2k} = 0$ voor gehele $k \geq 2$. De veeltermoplossing is dus

$$y_1(x) = a_0(1 - 6x^2).$$

Voor oneven $n = 2k + 1$ hebben we dan nog

$$a_n = \frac{(n^2 - 16)\left((n-2)^2 - 16\right) \dots (3^2 - 16)}{n(n-1)\dots 2} a_1.$$

Dit is het antwoord dat we zoeken, maar we kunnen het op een aantal verschillende manieren opschrijven.

$$a_n = \frac{a_1}{n!} \prod_{j=0}^{k-1} ((n-2j)^2 - 16),$$

$$= \frac{a_1}{n!} \prod_{j=0}^{(n-3)/2} ((n-2j)^2 - 16).$$

Gezien het alleen de coefficienten zijn voor oneven n, kunnen we ook schrijven

$$a_{2k+1} = \frac{a_1}{(2k+1)!} \prod_{j=0}^{k-1} ((2(k-j)+1)^2 - 16)$$

$$= \frac{a_1}{(2k+1)!} \prod_{j=1}^{k} ((2j+1)^2 - 16)$$

$$= \frac{a_1}{(2k+1)!} \prod_{j=1}^{k} (4j^2 + 4j - 15)$$

$$= \frac{a_1 4^k}{(2k+1)!} \prod_{j=1}^{k} (j^2 + j - 15/4)$$

$$= \frac{a_1 4^k}{(2k+1)!} \prod_{j=1}^{k} (j - 3/2)(j + 5/2)$$

$$= \frac{a_1 4^k}{(2k+1)!} (-1/2)_k (7/2)_k.$$

De tweede oplossing is dus

$$y_2(x) = a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k (-1/2)_k (7/2)_k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Vraag 3: Beschouw het volgende eigenwaardeprobleem op het inverval $(0, \sqrt{3})$.

$$3y''(x) + 2y'(x) + \frac{1}{3}y = -\lambda y(x), \quad y(0) = y(\sqrt{3}) = 0 \tag{4}$$

a) *(1 pt.)* Toon aan dat dit een Sturm-Liouville probleem is en bovendien dat het regulier is.

b) *(2.5 pt.)* Geef alle eigenwaarden λ_n en bijhorende eigenfuncties $y_n(x)$ van (4).

c) *(1.5 pt.)* Gegeven een functie $f(x)$ op $(0, \sqrt{3})$ die voldoet aan de voorwaarden

$$3f''(x) + 2f'(x) + \frac{1}{3}f = 1, \quad f(0) = f(\sqrt{3}) = 0$$

Schrijf $f(x)$ als een (oneindige) lineare combinatie van de eigenfuncties van $y(x)$ en bereken de coëfficiënten van die combinatie.

Oplossing:

a) We vinden dat we dit kunnen herschrijven als

$$y'' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{9}y = -\frac{1}{3}\lambda y$$

Nu kunnen we de hele vergelijking vermenigvuldigen met de volgende exponent:

$$e^{\frac{2}{3}x}y'' + e^{\frac{2}{3}x}\frac{2}{3}y' + \frac{1}{9}e^{\frac{2}{3}x}y = -\frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}x}\lambda y$$

En dit laat toe de vergelijking te herschrijven naar

$$-(e^{\frac{2}{3}x}y')' - \frac{1}{9}e^{\frac{2}{3}x}y = \frac{1}{3}\lambda e^{\frac{2}{3}x}y$$

Dit is een Sturm-Liouville probleem met p, q, r als

$$p(x) = ae^{\frac{2}{3}x}, \qquad q(x) = -\frac{a}{9}e^{\frac{2}{3}x}, \qquad r(x) = \frac{a}{3}e^{\frac{2}{3}x}$$

met $a \in \mathbb{R}$ een vrij te kiezen constante. Nu is

- $p(x)$ en $p'(x)$, $q(x)$ en $r(x)$ continue in $(0, \sqrt{3})$,
- $p(x)$ en $r(x)$ kunnen zo gekozen worden dat ze overal positief zijn in $(0, \sqrt{3})$,

Daarmee tonen we aan dat dit Sturm-Liouville probleem ook regulier is.

b) We zoeken nu alle mogelijke oplossingen van deze vergelijking. Daarvoor maken we een gevalsonderscheid voor $\lambda > 0, \lambda < 0$ en $\lambda = 0$. Als $\lambda = 0$ hebben we

$$y'' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{9}y = 0$$

Dit heeft als karakterestieke vergelijking

$$r^2 + \frac{2}{3}r + \frac{1}{9} = 0.$$

De nulpunten vinden we door de discriminant te berekenen:

$$D = \frac{4}{9} - 4\frac{1}{9} = 0$$

dus $r_{1,2} = -\frac{1}{3}$. Dit geeft als oplossing voor y (zie hoofdstuk 2):

$$y(x) = (A + Bx)\, e^{-\frac{1}{3}x}$$

Als we nu de beginvoorwaarden invullen vinden we dat $A = B = 0$ moet zijn, e.g. de triviale oplossing.
Dit kunnen we herhalen voor $\lambda < 0$. We stellen dat $\lambda = -k^2$. De karakteristieke vergelijking is dan

$$r^2 + \frac{2}{3}r + \frac{1}{9} - \frac{k^2}{3} = 0.$$

De nulpunten vinden we door de discriminant te berekenen:

$$D = \frac{4}{9} - 4(\frac{1}{9} - \frac{k^2}{3}) = 4\frac{k^2}{3}$$

dus $r_\pm = -\frac{1}{3} \pm \frac{k}{\sqrt{3}}$. Dit geeft als oplossing voor y (zie hoofdstuk 2):

$$y(x) = Ae^{-\frac{1}{3}x + \frac{k}{\sqrt{3}}x} + Be^{-\frac{1}{3}x - \frac{k}{\sqrt{3}}x}$$

De randvoorwaarden geven dat $A = -B$, en dat $k = 0$. Maar sinds we hebben aangenomen dat $\lambda < 0$, kan dit niet, waardoor we dus enkel de triviale oplossing $A = B = 0$ vinden. (Dit kon ook korter, door aan te tonen dat de de voorwaarden van Stelling 8.3 waren voldaan en $\lambda \geq 0$ was. Dit was ook correct.)
Als $\lambda > 0$ schrijven we deze als $\lambda = k^2$. Dit geeft de karakteristieke vgl

$$r^2 + \frac{2}{3}r + \frac{1}{9} + \frac{k^2}{3} = 0$$

met determinant $D = -4\frac{k^2}{3}$ en de nulpunten

$$r_\pm = -\frac{1}{3} \pm i\frac{k}{\sqrt{3}}$$

Dit geeft als oplossing

$$y(x) = e^{-\frac{1}{3}x}\left(A\sin\left(\frac{kx}{\sqrt{3}}\right) + B\cos\left(\frac{kx}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

De randvoorwaarden invullen geeft de voorwaarde dat $B = 0$ is en $k = n\pi, n \in \mathbb{Z}$. We krijgen dan de eigenfuncties $y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{\sqrt{3}}\right), n \in \mathbb{N}$ met eigenwaarden $\lambda_n = n^2\pi^2$, $n \in \mathbb{Z}/\{0\}$.

c) Schrijf $f(x)$ als

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x) = e^{-\frac{1}{3}x}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\sqrt{3}}\right)$$

Nu voldoet $f(x)$ al aan de randvoorwaarden, sinds de eigenfuncties al aan dezelfde randvoorwaarden voldoen. We hebben de bijkomende voorwaarde

$$1 = 3f''(x)+2f'(x)+\frac{1}{3}f = e^{-\frac{1}{3}x}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(3y_n''+2y_n'+\frac{1}{3}y_n) = e^{-\frac{1}{3}x}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-\lambda y_n) = e^{-\frac{1}{3}x}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-n^2\pi^2 y_n)$$

We zoeken dus de coëfficienten $b_n = n^2\pi^2 a_n$ zodanig dat op $(0, \sqrt{3})$ geldt dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\sqrt{3}}\right) = -e^{\frac{1}{3}x}.$$

We zoeken dus b_n. Via stelling 8.4 vinden we deze als

$$b_n = \frac{\int_0^{\sqrt{3}} -e^{\frac{1}{3}x}\sin\left(\frac{n\pi x}{\sqrt{3}}\right)dx}{\int_0^{\sqrt{3}} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{\sqrt{3}}\right)dx}$$

De noemer is gelijk aan $\sqrt{3}/2$, de teller is gelijk aan

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}} -e^{\frac{1}{3}x}\sin\left(\frac{n\pi x}{\sqrt{3}}\right)dx \\
&= \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{e^{\frac{1}{3}x}}{\frac{1}{9}+\frac{n^2\pi^2}{3}}\left(\frac{1}{3}\sin\left(\frac{n\pi x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{n\pi}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{n\pi x}{\sqrt{3}}\right)\right)\right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{-6\pi n\left(1+(-1)^{n+1}e^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)}{3\pi^2n^2+1}
\end{aligned}$$

Dan is

$$a_n = \frac{b_n}{n^2\pi^2} = \frac{-6\left(1+(-1)^{n+1}e^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)}{n\pi(3\pi^2n^2+1)}$$

We vinden dus voor alle $x \in (0, \sqrt{3})$

$$f(x) = e^{-\frac{1}{3}x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-6\left(1+(-1)^{n+1}e^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)}{n\pi(3\pi^2n^2+1)}\sin\left(\frac{n\pi x}{\sqrt{3}}\right)$$

Methode 2: Het was ook mogelijk om eerst een oplossing voor $f(x)$ te vinden, om die dan vervolgens te schrijven als een lineaire combinatie van $y_n(x)$. Je kon $f(x)$ schrijven als de som van een homogenen oplossing en een particuliere. Een particuliere oplossing was snel gevonden ($f_p(x) = 3$) en de homogene oplossing was identiek aan de oplossing van het geval $\lambda = 0$.

$$f_h(x) = (Ax+B)e^{-\frac{1}{3}x}$$

Je vond dus

$$f(x) = (Ax+B)e^{-\frac{1}{3}x} + 3$$

Als je dan de randvoorwaarden invulde kon je de waarden van A en B vinden. Eenmaal je dit had, kon je dit schrijven als

$$f(x) = \sum_{n=0} a_n y_n(x)$$

en zo de waarden van a_n bepalen.